

ZUR BERECHNUNG VON ULTRASCHALL-SCHWINGERN MIT LONGITUDINAL-BIEGEKOPPLUNG

J. Herberitz, K.-W. HIRSCH

Ultraschalltechnik, Universität-GH-Duisburg

1. Einleitung

Longitudinal-Resonatoren mit endständigen Biegeelementen finden in der Ultraschall-Leistungstechnik als Sonotroden viele Anwendungen. Die Eigenschaften dieser Schwinger lassen sich im allgemeinen nicht in mathematisch geschlossener Form berechnen, weil beispielsweise die Kontur nicht durch eine analytische Funktion darstellt werden kann.

Zur näherungsweise Berechnung der Schwinger bietet sich ein numerisches Verfahren mit finiten Elementen an. Das elastische Verhalten eines allgemeinen finiten Elementes wird durch den Spannungs- und den Verzerrungstensor mit je neun ortsabhängigen Komponenten beschrieben. Bei Segmentierung des Schwingers in finite Elemente unter Berücksichtigung des jeweiligen Spannungszustandes ergeben sich für die hier betrachteten isotropen Longitudinal- bzw. Biegeschwinger nur spezielle Lastfälle, die über eine Zusammenfassung von Spannungen und Dehnungen zu einer wesentlichen Reduzierung der Anzahl der Tensorkomponenten führen.

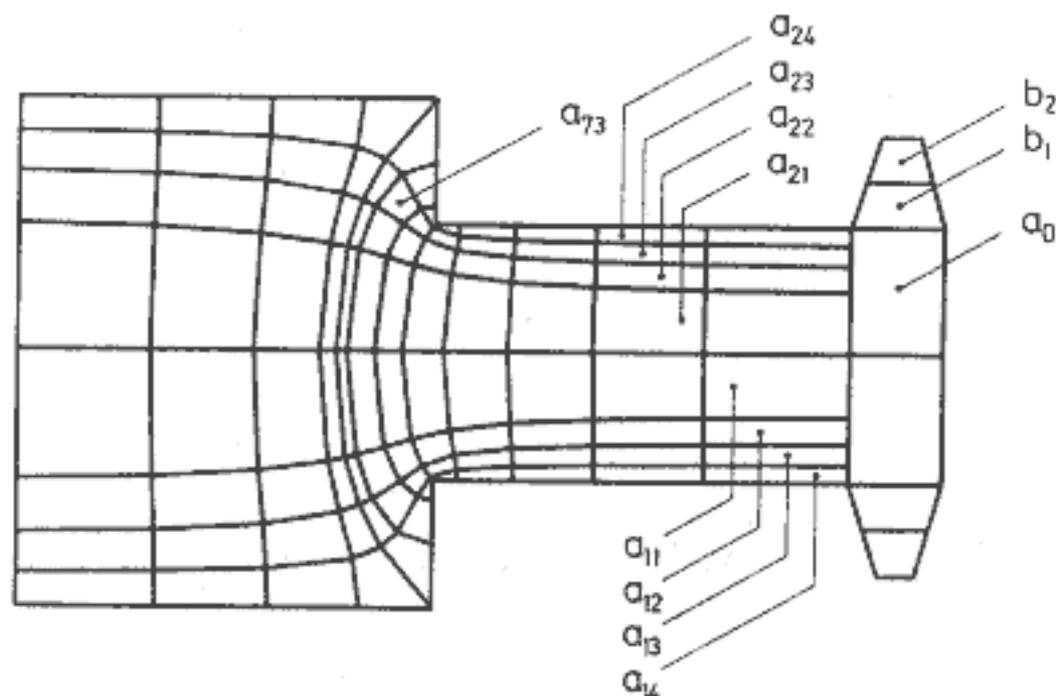


Abb.1 Beispiel für die Segmentierung eines Longitudinal-Biegeschwingers

Abbildung 1 zeigt an einem vereinfachten Beispiel eine Segmentierung mit Hilfe der Konturtransformation /1/, die zu finiten Elementen führt, die den obigen Anforderungen genügen.

## 2. Finite Elemente

Im folgenden werden finite Elemente betrachtet, die so klein sind, daß sie elastodynamisch als homogene, differentielle Volumenelemente behandelt werden dürfen.

Während sich für die Berechnung von Longitudinal-Schwingern die Eigenschaften der finiten Elemente auf die Übertragung des konjugierten Größenpaares Kraft  $K$  und Schnelle  $V$  reduzieren läßt [2], müssen für die Beschreibung des Übertragungsverhaltens von Biegeelementen zwei konjugierte Größenpaare, nämlich Biegemoment  $M$  und Drehgeschwindigkeit  $\Omega$  bzw. Kraft  $K$  und Schnelle  $V$  berücksichtigt werden.

Zur Herleitung der Übertragungsmatrizen differentieller Volumenelemente in der Form von Kettenmatrizen soll zunächst unter Benutzung der Koordinaten- und Richtungsfestlegungen in Abbildung 2 der Fall eines von der Kraft  $K_x$  und der Schnelle  $V_x$  nur longitudinal beanspruchten Elementes betrachtet werden.

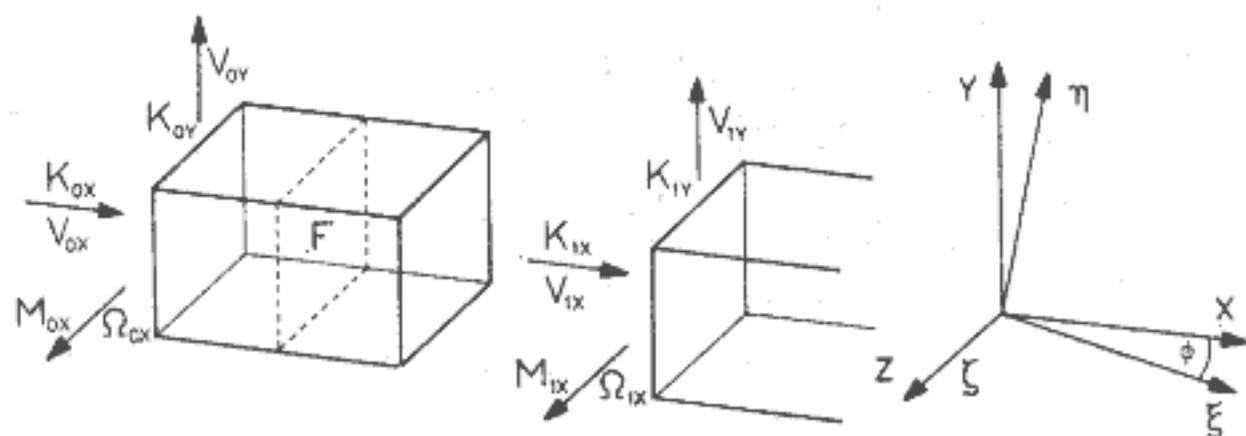


Abb.2 Zur Festlegung von Koordinaten und Vorzeichen

In den folgenden Gleichungen ist  $\omega$  die Kreisfrequenz, und bezogen auf das finite Element,  $F$  sein Querschnitt,  $I$  dessen Flächenträgheitsmoment,  $dx$  seine Länge,  $\rho$  die Massendichte,  $E$  der Elastizitätsmodul und  $G$  der Schubmodul.

$$K_{1X} = K_{0X} - j\omega V_{0X} \rho F dx \quad (1)$$

$$V_{1X} = V_{0X} - j\omega \frac{K_{0X}}{EF} dx \quad (2)$$

Gleichung 1 beschreibt die Einwirkung der Trägheit des finiten Elementes auf die Kraftübertragung, während Gleichung 2 die Einwirkung der Elastizität dieses Elementes auf die Schnelleübertragung beschreibt.

Aus beiden Gleichungen ergeben sich die Komponenten der differentiellen Übertragungsmatrix in Gleichung 3. Nunmehr soll betrachtet werden, wie ein Biegeelement die (Quer-)Kraft  $K_{0y}$ , die Schnelle  $V_{0y}$ , das Biegemoment  $M_{0z}$  und die Drehgeschwindigkeit  $\Omega_{0z}$  überträgt.

$$\begin{bmatrix} K_{1X} \\ V_{1X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j\omega\rho F dx \\ -j\omega \frac{1}{GF} dx & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{0X} \\ V_{0X} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$K_{1Y} = K_{0Y} - j\omega V_{0Y} \rho F dx \quad (4)$$

$$V_{1Y} = V_{0Y} + \Omega_{0Z} dx - j\omega \frac{K_{0Y}}{GF} dx \quad (5)$$

$$M_{1Z} = M_{0Z} - K_{0Y} dx - j\omega \Omega_{0Z} \rho I dx \quad (6)$$

$$\Omega_{1Z} = \Omega_{0Z} - j\omega \frac{M_{0Z}}{EI} dx \quad (7)$$

Die Gleichungen 4 und 5 entsprechen den Gleichungen 1 und 2 und beschreiben die Einwirkung der Massenträgheit bzw. der Scherelastizität auf die Übertragung der (Quer-)Kraft und der Schnelle; hinzu kommt in Gleichung 5 die Einwirkung der Drehgeschwindigkeit.

Gleichung 6 beschreibt die Einwirkung der Drehträgheit und die Einwirkung der (Quer-)Kraft auf die Übertragung des Moments. Gleichung 7 beschreibt die Einwirkung der Biegeelastizität auf die Übertragung der Drehgeschwindigkeit.

Aus den Gleichungen 4 bis 7 ergeben sich die Komponenten der differentiellen Übertragungsmatrix in Gleichung 8.

$$\begin{bmatrix} K_{1Y} \\ V_{1Y} \\ M_{1Y} \\ \Omega_{1Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j\omega\rho F dx & 0 & 0 \\ -j\omega \frac{1}{GF} dx & 1 & 0 & dx \\ -dx & 0 & 1 & -j\omega\rho I dx \\ 0 & 0 & -j\omega \frac{1}{EI} dx & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{0Y} \\ V_{0Y} \\ M_{0Y} \\ \Omega_{0Y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Zur Berechnung eines Longitudinal-Schwingers reicht es allerdings nicht aus, Matrizen des in Gleichung 3 dargestellten Typs zu verketteten. Beispielsweise für das Element  $a_{73}$  in Abbildung 1 benötigt man die Übertragungsmatrix für finite Elemente, deren Achse zur Symmetrieachse des gesamten Longitudinal-Schwingers um einen Winkel  $\phi$  verkippt ist. Aus den Gleichungen 1, 2, 4 und 5 ergeben sich unter der Bedingung  $\Omega_{0Z} = 0$  die Komponenten der differentiellen Übertragungsmatrix in Gleichung 9

$$\begin{bmatrix} K_{1X} \\ V_{1X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j\omega\rho F d\xi \\ -j\omega \frac{d\xi}{F \eta \zeta} \left( \frac{\cos^2 \phi}{E} + \frac{\sin^2 \phi}{G} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{0X} \\ V_{0X} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Der in Abbildung 3 dargestellte Vergleich der gemessenen Resonanzfrequenzen und der berechneten Kurve bei einem scharfkantig gestuften Longitudinal-Schwinger bei verschiedenen Durchmesser-Verhältnissen dokumentiert den Fortschritt, der durch die Verkettung von Übertragungsmatrizen gemäß Gleichung 9 erzielt wurde.

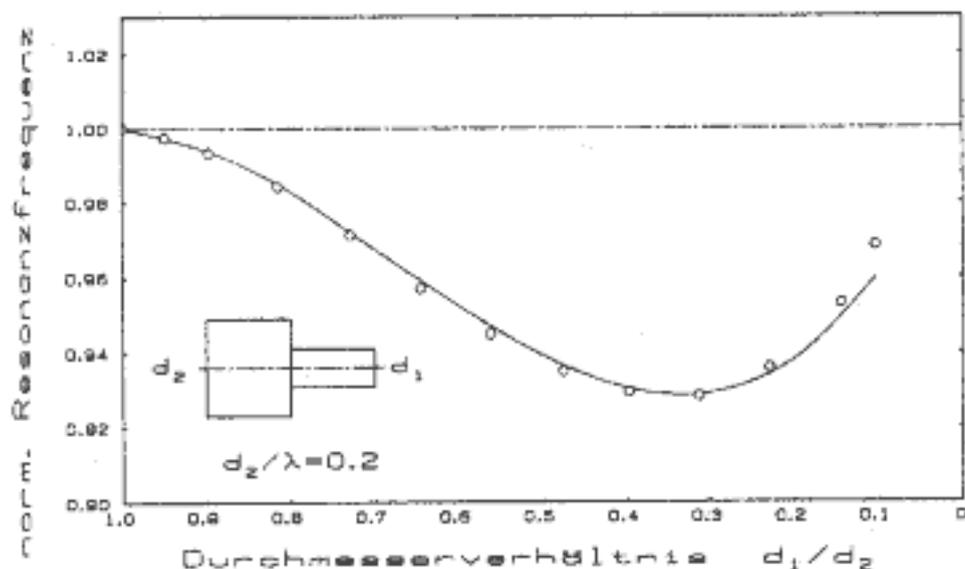


Abb.3 An Al-Schwingern gemessene (o) und für  $G/E = 0.39$  berechnete (—) Abhängigkeit der Resonanzfrequenz vom Durchmesserverhältnis

### 3. Kopplung von Biege- und Longitudinal-Elementen

Die oben betrachteten finiten Elemente für die Longitudinal- bzw. Biegeschwinger weisen jeweils 2 gegenüberliegende Kopplungsflächen auf. Dagegen weist das finite Element  $a_0$  in Abbildung 1 neben seinen axialen Kopplungsflächen für die Longitudinal-Schwingung eine radiale Kopplungsfläche für die Biegeschwingung auf. Wenn man dieses Koppellement als biegesteif und aus Symmetriegründen als drehfest ansetzt, bleiben als zu verknüpfende Größenpaare Kraft und Schnelle in  $x$ -Richtung auf den beiden axialen Flächen und auf der radialen Fläche. Das Gleichungssystem 10 beschreibt die Verknüpfung zwischen diesen Größen.

$$\begin{bmatrix} K_{1x} \\ V_{1x} \\ V_{bx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j\omega F dx & 1 \\ -j\omega \frac{1}{EF} dx & 1 & -j\omega \frac{1}{2EF} dx \\ -j\omega \frac{1}{2EF} dx & 1 & -j\omega \frac{1}{4EF} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{0x} \\ V_{0x} \\ K_{bx} \end{bmatrix} \quad (10)$$

### 4. Literatur

- /1/ J. Herbertz : Zur numerischen Berechnung der Werkstoffbeanspruchung in Transformatoren für longitudinale Ultraschall-Schwingungen  
DAGA'81, VDE-Verlag, Berlin 1981, S.501-504
- /2/ J. Herbertz, K.-W. Hirsch : Gesichtspunkte für die Optimierung von Ultraschall-Transformatoren  
DAGA'81, VDE-Verlag, Berlin 1981, S.505-508

Diese Untersuchungen werden vom Minister für Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen gefördert.