

ÜBERTRAGUNG VON BIEGEWELLEN AUF INHOMOGENEN SCHUBELASTISCHEN BALKEN

K.-W. Hirsch, J. Herbertz

Ultraschalltechnik, Universität -GH- Duisburg

Einleitung und Problemstellung

Das Problem der Übertragung von Biegewellen auf inhomogenen Biegewellenleitungen soll im folgenden auf die Berechnung der Übertragung zwischen zwei differentiellen, homogenen Leitungsstücken zurückgeführt werden. Es wird ein Kalkül auf der Grundlage der Kettenmatrixmethode für Biegewellenleiter /1/ vorgestellt, das besonders im Hinblick auf die numerische Auswertung geeignet ist, Biegewellenleiter zu berechnen.

Eigenwerte und Eigenvektoren der Kettenmatrix

Nach /1,2/ wird der Biegewellenleiter nach dem drehrägen, schubelastischen BERNOULLI'sche Modell durch Gl. 1 für die Klemmengrößen beschrieben. (mit $k = \omega \sqrt{\rho/G}$ $Z = F/\rho \omega^2$ $\epsilon = \omega \sqrt{\rho/E}$ $C = I/\rho \omega^2$)

$$\begin{bmatrix} K(x+dx) \\ V(x+dx) \\ M(x+dx) \\ Q(x+dx) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j\kappa Z dx & 0 & 0 \\ -j\frac{\kappa}{Z} dx & 1 & 0 & dx \\ -dx & 0 & 1 & -j\kappa C dx \\ 0 & 0 & -j\frac{\kappa}{C} dx & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K(x) \\ V(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Faßt man die in Gl. 1 enthaltenen Klemmengrößenquadrupel als Vektoren auf, so spannen diese einen vierdimensionalen Zustandsraum für Biegewellen auf: jeder Punkt dieses Raumes ist eine eindeutige Darstellung eines möglichen Meßergebnisses des Zustandes der Leitung. Für die Berechnung von Leitungsphänomenen bietet sich an, das Eigenvektorsystem der in Gl. 1 auftretenden Kettenmatrix \underline{D} als Bezugssystem für die Zustandsvektoren zu benutzen.

Da diese Eigenvektoren weder orthogonal noch normiert sind, ist es erforderlich, das kontragrediente Bezugssystem vollständig zu bestimmen. (Siehe z.B. /3/ zur Darstellung von Vektoren in allgemeinen schiefwinkligen Bezugssystemen.) Im Sinne der Übersichtlichkeit ist es vorteilhaft, die Vektoren in diesem Raum in der sogenannten bra-ket-Schreibweise zu notieren. Im folgenden bedeutet $|b\rangle$ einen (ket-) Vektor im kogredienten Basissystem, $\langle b|$ einen (bra-) Vektor im kontragredienten Basissystem. $b_1 b_2$ ist das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren.

Mit dieser Schreibweise kann Gl. 1 wie folgt formuliert werden:

$$|b(x+dx)\rangle = \underline{D} |b(x)\rangle \quad (2)$$

Das Eigenvektorsystem $|c_i\rangle$ der Matrix \underline{D} wird hier als kogrediente Basis eingeführt. Es ist bestimmt Gl. 3.

$$\underline{D} |c_i\rangle = \lambda_i |c_i\rangle \quad (3)$$

Die Eigenwerte λ_i hängen mit den beiden Wellenzahlen ϵ und η der Biegewellen über Gl. 4 zusammen.

$$\lambda_1 = 1 - \epsilon dx \quad \lambda_2 = -1 + \epsilon dx \quad \lambda_3 = 1 - \eta dx \quad \lambda_4 = 1 + \eta dx \quad (4)$$

Beide Wellenzahlen sind reell, wenn die reziproke Wellenzahl der Scherwelle k kleiner ist als der Trägheitsradius des Balkenquerschnitts, sonst ist ϵ reell und η imaginär. Die vier Eigenvektoren beschreiben die vier unabhängig ausbreitungsfähigen Biegewellen. Die Eigenvektoren 1 und 2 bzw. 3 und 4 sind hin- und rücklaufende Wellen des gleichen Typs, der im folgenden ϵ -Wellentyp bzw. η -Wellentyp genannt wird.

Das reziproke, kontragrediente Basissystem $|c_j\rangle$ erhält man aus der Orthogonalitätsbedingung Gl. 5.

$$\langle c_i | c_j \rangle = \delta_{ij} \quad (5)$$

Eine explizite Formulierung des Eigenvektorsystems ist in /4/ angegeben.

Gl. 5 bestimmt das kontragrediente Bezugssystem bis auf eine willkürliche Konstante für jeden Eigenvektor. Man kann beispielsweise die Konstanten so festlegen, daß die Kraftkomponenten der kogredienten Basis gerade 1 werden. Dann führt die Darstellung eines Zustandsvektors $|b\rangle$ in Gl. 6 in bezug zur kogredienten Basis zu Amplituden k_{bj} , die in Kraft-einheiten gemessen werden.

$$|b\rangle = \sum_{i=1}^4 \langle k_{ci} | b \rangle |k_{ci}\rangle = \sum_{j=1}^4 k_{bj} |k_{cj}\rangle \quad (6)$$

Das sich ergebende Bezugssystem wird als "kraftbezogen" bezeichnet und durch den Index unten links angezeigt.

Eine Festlegung der Konstanten durch Funktionale der Klemmengrößen ist ebenfalls möglich. Wählt man die Konstanten so, daß der Energieeinfluß N_W für jeden kogredienten Basisvektor gerade die Leistungseinheit ist, wird das Bezugssystem "leistungszugeordnet" genannt.

BiegeWellen an einer Grenzfläche

Die Koppelstelle zwischen zwei BiegeWellenleitungen läßt sich als Grenzfläche durch die differentiellen Kettenmatrizen M^D und N^D der beiden beteiligten Leitungsstücke μ und ν charakterisieren. Der Zustandsvektor $|b\rangle$ in der Grenzfläche läßt sich sowohl nach dem kogredienten Bezugssystem des Wellenleiters μ als auch nach dem kogredienten Bezugssystem des Wellenleiters ν entwickeln.

$$\sum_{j=1}^4 k_{bj}^{\mu} |k_{cj}^{\mu}\rangle = \sum_{j=1}^4 k_{bj}^{\nu} |k_{cj}^{\nu}\rangle \quad (7)$$

Multipliziert man Gl. 7 mit dem kontragredienten Vektor $\langle k_{ci}^{\mu}$, so erhält man den Zusammenhang zwischen der Amplitude des Eigenzustandes i im Leitungsstück μ in Abhängigkeit von den Zuständen auf der Leitung ν . Auf der linken Seite von Gl. 7 bleibt wegen der Orthogonalität der Basisvektoren nur die Amplitude k_{bj}^{μ} übrig; die rechte Seite ergibt die Summe von Skalarprodukten der kontragredienten Basisvektoren in μ mit den kogredienten Basisvektoren in ν .

$$k_{bj}^{\mu} = \sum \langle k_{ci}^{\mu} | k_{cj}^{\nu} \rangle k_{bj}^{\nu} \quad (8)$$

$$k_{R_{11}}^{\mu} = \frac{\langle k_{c2}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle - \langle k_{c3}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c2}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}{\langle k_{c1}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle - \langle k_{c3}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c1}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}$$

$$k_{R_{12}}^{\mu} = \frac{\langle k_{c4}^{\mu} | k_{c3}^{\nu} \rangle \langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle - \langle k_{c3}^{\mu} | k_{c3}^{\nu} \rangle \langle k_{c4}^{\mu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}{\langle k_{c1}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle - \langle k_{c3}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c1}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}$$

$$k_{T_{11}}^{\mu} = \frac{\langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}{\langle k_{c1}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle - \langle k_{c3}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c1}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}$$

$$k_{T_{12}}^{\mu} = \frac{-\langle k_{c3}^{\nu} | k_{c1}^{\mu} \rangle}{\langle k_{c1}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle - \langle k_{c3}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c1}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}$$

$$k_{R_{21}}^{\mu} = \frac{\langle k_{c1}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c2}^{\nu} | k_{c2}^{\nu} \rangle - \langle k_{c2}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c1}^{\nu} | k_{c2}^{\nu} \rangle}{\langle k_{c1}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle - \langle k_{c3}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c1}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}$$

$$k_{R_{22}}^{\mu} = \frac{\langle k_{c1}^{\mu} | k_{c3}^{\nu} \rangle \langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle - \langle k_{c2}^{\mu} | k_{c3}^{\nu} \rangle \langle k_{c1}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}{\langle k_{c1}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle - \langle k_{c3}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c1}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}$$

$$k_{T_{21}}^{\mu} = \frac{\langle k_{c1}^{\nu} | k_{c1}^{\mu} \rangle}{\langle k_{c1}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle - \langle k_{c3}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c1}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}$$

$$k_{T_{22}}^{\mu} = \frac{-\langle k_{c1}^{\nu} | k_{c3}^{\mu} \rangle}{\langle k_{c1}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c3}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle - \langle k_{c3}^{\mu} | k_{c1}^{\mu} \rangle \langle k_{c1}^{\nu} | k_{c3}^{\nu} \rangle}$$

Abb. 1 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Querkraft an der Koppelstelle zweier BiegeWellenleiter

Wiederholt man die Multiplikation von Gl. 7 sequentiell mit allen Vektoren c_i , so erhält man einen Satz von Gleichungen, der in der folgenden Matrixgleichung zusammengefaßt wird, die die Amplituden $\underline{K}^{\mu\nu}$ im Leitungstück μ mit den Amplituden $\underline{K}^{\nu\lambda}$ im Leitungstück ν verknüpft.

$$\underline{K}^{\mu\nu} = \underline{K}^{\mu\nu} \underline{G} \underline{K}^{\nu\lambda} \quad \text{mit} \quad \underline{K}^{\mu\nu} G_{ij} = \langle \underline{K}^{\mu} c_i | \underline{K}^{\nu} c_j \rangle \quad (9)$$

$\underline{K}^{\mu\nu} \underline{G}$ verknüpft die in μ hin- und rücklaufenden Wellen des ϵ - und des η -Typs mit den jeweiligen hin- und rücklaufenden Wellen in ν . Betrachtet man eine in μ hinlaufende ϵ -Welle als einlaufende Welle, wird nach Maßgabe von $\underline{K}^{\mu\nu} \underline{G}$ in die rücklaufende ϵ - und η -Welle in μ reflektiert und in die in ν hinlaufende ϵ - und η -Wellen transmittiert.

Für den Fall einer einlaufenden ϵ -Welle sind daher 2 Reflexions- und 2 Transmissionskoeffizienten zu bestimmen. Einen entsprechenden Satz von Koeffizienten erhält man für eine einlaufende η -Welle. In Abb. 1 sind die 4 Reflexionskoeffizienten R und die 4 Transmissionskoeffizienten T zusammengefaßt. Der erste Index rechts kennzeichnet den einlaufenden Wellentyp, der zweite Index rechts den zweiten beteiligten Wellentyp.

In gleicher Weise /4/ lassen sich mit Hilfe des leistungsbezogenen Bezugssystems die Koeffizienten auch für den Energiefluß an der Grenzfläche formulieren.

Beispiele

In den folgenden Beispielen zum Grenzflächenverhalten von BiegeWellen dient als Bezugswellenleiter ein Balkenstück mit einer Profilhöhe von $h_0 = 39,5$ mm und den in /2/ beschriebenen Eigenschaften, der an einen Wellenleiter mit anderer Profilhöhe angeschlossen ist. Die einfallende Welle kommt stets aus dem Bezugswellenleiter. Bei der Betriebsfrequenz 20 kHz ist nur die Anregung einer ϵ -Welle als einlaufende Welle möglich, weil für den Bezugswellenleiter bei 20 kHz die Wellenzahl η

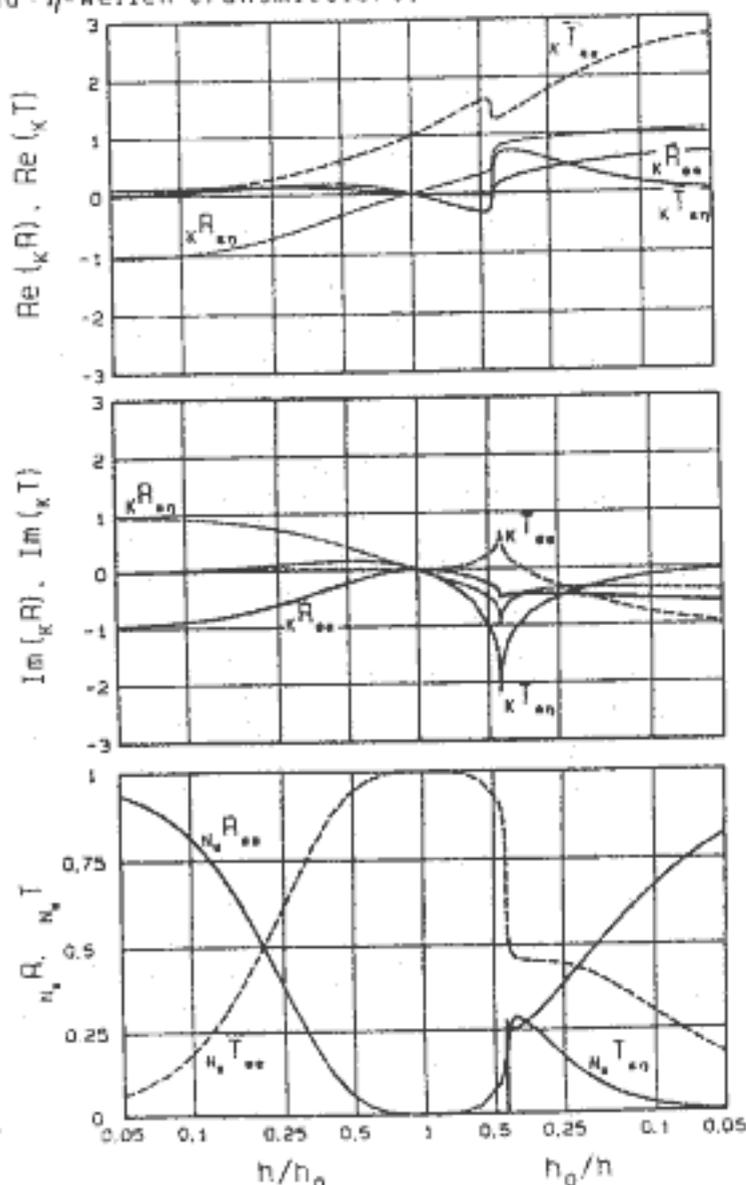


Abb. 2 Reflexion und Transmission für die Querkraft und für die Wirkleistung an der Koppelstelle zweier BiegeWellenleiter in Abhängigkeit vom Verhältnis ihrer Höhen (20 kHz)

imaginär, der η -Typ daher keine Leistung übertragen kann.

Abb. 2 zeigt die Real- bzw. Imaginärteile der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Querkraft und den Energiefluß. Das Grenzflächenverhalten ändert sich sprunghaft, sobald im angeschlossenen Wellenleiter eine Profilhöhe erreicht wird, von der ab in diesem Wellenleiter auch η -Wellen zum Energiefluß beitragen können ($h/h_0=0,469$).

Für die gleiche Grenzfläche ist in Abb. 3 für eine einlaufende ϵ -Welle und in Abb. 4 für eine einlaufende η -Welle der Energiefluß bei einer Betriebsfrequenz von 60 kHz dargestellt. Besonders interessant ist in Abb. 3 die nahezu vollständige Reflexion der η -Welle in die rücklaufende ϵ -Welle und in Abb. 4 der auftretende abrupte Übergang von Leistungsreflexion zu Leistungstransmission.

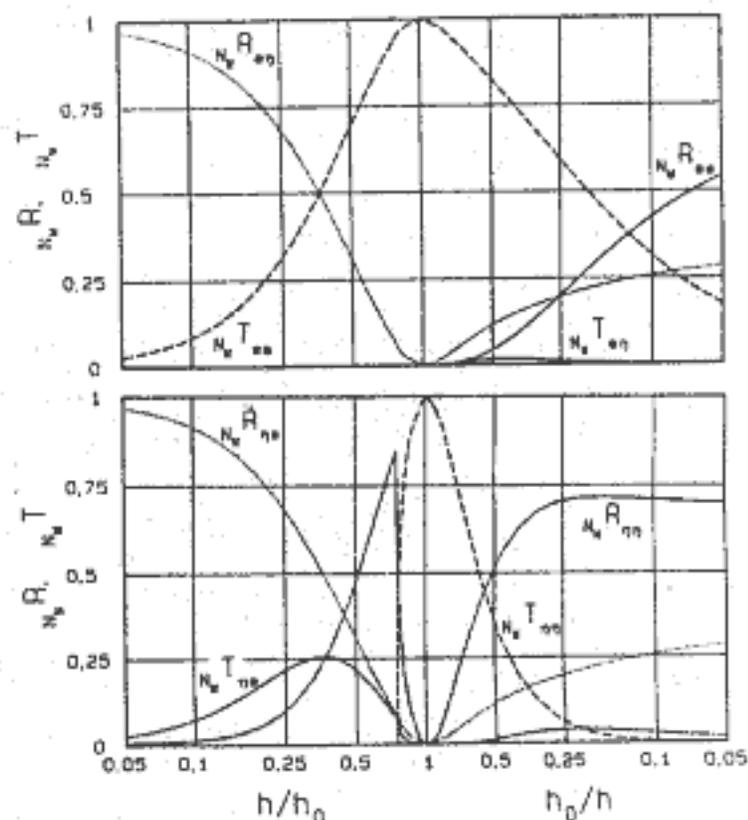


Abb. 3 Reflexion und Transmission für die Wirkleistung an der Koppelstelle zweier BiegeWellenleiter in Abhängigkeit vom Verhältnis ihrer Höhen (60 kHz)

Literatur

- /1/ HERBERTZ, J., HIRSCH, K.-W.: "Zur Berechnung von Ultraschall-Schwingern mit Longitudinal-Biegekopplung", Fortschritte der Akustik -FASE/DAGA'82, Bad Honnef: DPG-GmbH 1982
- /2/ HIRSCH, K.-W., HERBERTZ, J.: "Das BiegeWellenspektrum eines freischwingenden Balkens", Fortschritte der Akustik -DAGA'88
- /3/ LICHNEROWICZ, A.: "Einführung in die Tensoranalysis", Bibliographisches Institut, Mannheim 1966
- /4/ HIRSCH, K.-W.: "Untersuchungen zu den Grundlagen der Berechnung von BiegeWellenleitern", Dissertation Universität-GH-Duisburg (in Vorb.)