

# Messung der Emissionsdaten von Mündungsknallen

Dr.-Ing. Karl-Wilhelm Hirsch, Düsseldorf

## 1 Kurzfassung

Der Beitrag versucht aus physikalischer Sicht, sachgerechte Kenngrößen zur Beschreibung der akustischen Emission beim Mündungsknall abzuleiten und zu definieren. Er begründet die Wahl der Intensität bzw. des Intensitätspegels als maßgebliche Kenngröße und diskutiert Möglichkeiten zur mathematischen Darstellung der Richtwirkung in sogenannten Richtungsspektren. Es wird aufgezeigt, daß das Konzept der Schalleistung zur Beschreibung einer Schallquelle für Mündungsknalle erhebliche Schwächen aufweist, weil nur dann aus der Angabe der Leistung der Quelle und der in der Ebene gültigen Richtcharakteristik ein Immissionspegel berechnet werden kann, wenn die Schallquelle rotationssymmetrisch um eine ausgezeichnete Achse ist. Die Diskussion über die Bestimmung der Intensität einer Schallquelle aus der Messung des Schalldrucks auf einem Meßkreis um die Quelle herum unterstreicht die Bedeutung der Eliminierung der Bodenreflexion im Hinblick auf die Angabe von Emissionsspektren.

## 2 Einleitung

Die Bestimmung der Emissionsdaten des Schießgeräusches einer Waffe aus Messungen der Schallimmission setzt eine Quellbeschreibung und ein Ausbreitungsmodell für jedes Schallereignis voraus, das beim Einzelschuß einer Waffe auftreten kann (siehe Anhang I zu der hier verwendeten Wortwahl). Bei den auf Schießständen überwiegend zum Einsatz kommenden Handfeuerwaffen sind diese Schallereignisse der Mündungsknall und der Geschoßknall. Der Kugelschlag kann im Hinblick auf die Lärmbelästigung stets vernachlässigt werden. Beim Schießen mit Panzerfäusten oder bei Geschossen mit Sprengladungen können noch der Zündknall und der Einschlagknall als Schallereignisse hinzukommen.

Die Emissionsdaten müssen für jedes dieser Schallereignisse getrennt ermittelt werden. Gegenstand der folgenden Betrachtung ist die Bestimmung der Emissionsdaten des Mündungsknalles von Handfeuerwaffen. Dieses Verfahren läßt sich aber auf alle anderen Knallgeräusche übertragen, sofern sie als Kugelschallquellen mit Richtwirkung beschrieben werden können. Das Verfahren gilt also nicht für den Geschoßknall, obwohl auch für dieses Schallereignis eine Kugelschallquelle als Ersatzschallquelle mit ausgeprägter Richtcharakteristik definiert werden kann, welche die Schallimmission mit ausreichender Genauigkeit prognostiziert, s. /1/.

Die Definition und die Bestimmung der Emissionskenngrößen des Mündungsknalles kann nicht ohne weiteres von den aus Regelwerken bekannten Beschreibungen anderer Lärmquellen übernommen werden. Dafür gibt es zwei wesentliche Gründe: Einerseits spielt die Richtcharakteristik beim Mündungsknall eine weitaus bedeutendere Rolle als bei anderen typischen Lärmquellen. Bei einer Spannweite der Schallpegel von typisch 20 dB zwischen Pegeln in Schießrichtung und hinter dem Schützen ist die Approximation von Zwischenwerten ein gegebenenfalls pegelbestimmendes Verfahren für die Immission, das in den Regelwerken verläßlich definiert sein muß. Andererseits ist der Mündungsknall ein Einzelereignis, so daß Kenngrößen wie beispielsweise ‚Schalleistung‘ oder ‚energie-äquivalenter Dauerschallpegel‘ einer genaueren Betrachtung unterzogen werden müssen.

## 3 Definition der Emissionskenngrößen

### 3.1 Einführung

Zunächst ist es erforderlich, die Kenngrößen zu ermitteln, die den Mündungsknall von Waffen im Hinblick auf die Schallabstrahlung ausreichend und sachgerecht kennzeichnen können. Ziel dabei ist es – auch im Hinblick auf die Verwendung der Kenngrößen in typischen Ausbreitungsmodellen der Immissionsprognose – die Beschreibung der Quellstärke von der Beschreibung der Richtwirkung zu trennen. Es werden im Folgenden drei Verfahren vorgestellt. Das erste Verfahren geht von der Gültigkeit eines Separationsansatzes für eine akustische Energiegröße der Quelle aus. Die beiden anderen Verfahren beschreiben die Emission auf der Basis von Schallpegeln.

### 3.2 Die richtungsabhängige Intensität

#### 3.2.1 Faktorischer Separationsansatz

Unter der Annahme, daß die Richtwirkung der Quelle abstandsunabhängig ist, gelingt die oben angestrebte Trennung der Beschreibung der Quellstärke und der Richtwirkung durch einen faktorisierten Separationsansatz

$$Q(r, \mathbf{j}, \mathbf{q}) = Q_1(r) Q_2(\mathbf{j}, \mathbf{q}) \tag{Gl. 1}$$

Die Funktion Q beschreibt in Gl. 1 eine zunächst noch nicht definierte Energiegröße<sup>1</sup> des Schallfeldes, r ist der Abstand vom Mittelpunkt der Kugelschallquelle, φ und θ sind die Winkel in einem sphärischen Koordinatensystem. Die Zeitabhängigkeit wird hier zunächst nicht betrachtet.

In [2] wird eine solche Beschreibung für eine allgemeine Kugelschallquelle auf der Basis einer Analyse nach Kugelflächenfunktionen vorgestellt. Im Falle der Mündungsknalle kann man jedoch eine erheblich einfachere Beschreibung ableiten. Entscheidende Bedingung für diese Vereinfachung ist die Annahme der Rotationssymmetrie der Schallabstrahlung um die Schießrichtung. Dann läßt sich das dreidimensionale Problem in ein ebenes Problem überführen und die Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen durch eine Entwicklung nach Kreisfunktionen ersetzen. Es genügt also hier, das Schallfeld auf einem beliebigen Halbkreis um die Kugelschallquelle zu beschreiben, dessen Halbachse mit der Schießrichtung zusammenfällt. Da das im Folgenden beschriebene mathematische Konzept zur Darstellung von Richtcharakteristiken in der Ebene nicht auf spiegelsymmetrische<sup>2</sup> Probleme beschränkt ist, soll zunächst die Verwendung dieser Bedingung ausgesetzt werden. Genauso bleibt zunächst unberücksichtigt, daß die Funktion Q für den Mündungsknall überall positiv sein wird, da der Mündungsknall eine reine Quelle ist. Gl. 1 beschreibt in ihrer Allgemeinheit auch Senken.

#### 3.2.2 Reihenentwicklung der Intensität

Zur Vorbereitung einer mathematischen Darstellung der Richtcharakteristik wird zunächst die Kenngröße „emissionswirksame Quellintensität“  $I_E$  eingeführt. Diese Quellintensität ist der Betrag der Intensität einer Ersatzschallquelle für den Mündungsknall auf einer Kugel mit dem Radius  $r_0 = 1$  m. Sie ergibt sich aus der im akustischen Fernfeld der Quelle im Abstand r bestimmten Intensität  $I(\varphi)$ <sup>3,4</sup>

$$I_E(\mathbf{j}) = \frac{r^2}{r_0^2} I(r, \mathbf{j}) \tag{Gl. 2}$$

Formal ist  $I_E(\varphi)$  eine periodische Funktion mit der Periode  $2\pi$ .

Abb. 1 zeigt eine derartige Funktion exemplarisch.

Die natürliche, mathematische Darstellung eines solchen Funktionstyps, zu dem beispielsweise auch periodische Zeitverläufe gehören, ist das Spektrum, also die Angabe der Entwicklungskoeffizienten einer Fourier-Reihe.

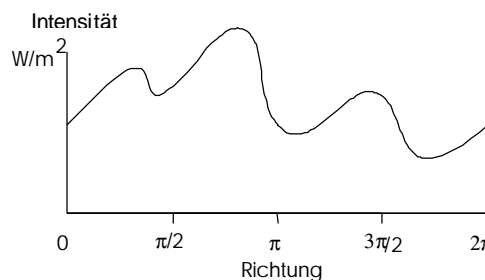


Abb. 1: Darstellung einer beliebigen emissionswirksamen Intensität über dem Winkel φ

<sup>1</sup> Als Energiegröße wird hier eine Kenngröße bezeichnet, die die Energie, den Energiefluß, Leistung etc. beschreibt, also nicht die Feldgrößen, zu denen der Druck und die Schnelle zählen.

<sup>2</sup> Die Rotationssymmetrie im Dreidimensionalen bildet sich auf eine Spiegelsymmetrie im Zweidimensionalen ab.

<sup>3</sup> Zur Definition der Intensität siehe Abschnitt 4.1

<sup>4</sup> Die Wahl dieser nicht direkt meßbaren Kenngröße hat Vorteile im Vergleich z.B. zur Wahl der physikalischen Intensität oder der Leistung oder der Energiedichte. Diese Vorteile liegen in der sachgerechten Anbindung dieser Kenngröße an eine Messung, aber auch in der daraus ableitbaren, üblichen Darstellung der Kenngrößen einer Quelle in einschlägigen Regelwerken. Diese Vorteile werden im Laufe der Diskussion deutlich werden. Entscheidend ist hier zunächst, daß die Schallemission im Fernfeld beschrieben wird und damit  $I_E$  unter jedem Winkel stets positiv ist. (Im Nahfeld gilt dies nicht in jedem Falle.)

Es liegt deshalb nahe (unter mathematisch-physikalischer Betrachtungsweise ist es eigentlich denknotwendig), das Koeffizientensystem (Spektrum)<sup>5</sup> als Kenngröße für die Richtcharakteristik zu verwenden.

Die Reihenentwicklung für die Quellintensität lautet

$$I_E(\mathbf{j}) = a_0 + \sum_{k>0} [a_k \cos(k\mathbf{j}) + b_k \sin(k\mathbf{j})] \tag{Gl. 3}$$

Mit der Einführung relativer Koeffizientensysteme  $c_k$  und  $s_k$  mit

$$c_k = \frac{a_k}{a_0} \quad s_k = \frac{b_k}{a_0} \tag{Gl. 4}$$

und der Einführung und der formalen Ersetzung von  $a_0$  durch  $I_{E0}$  ergibt sich

$$I_E(\mathbf{j}) = I_{E0} \left\{ 1 + \sum_{k>0} [c_k \cos(k\mathbf{j}) + s_k \sin(k\mathbf{j})] \right\} = I_{E0} R_E(\mathbf{j}) \tag{Gl. 5}$$

Die Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten  $c_k$  und  $s_k$  sind explizit ableitbar, wenn man sich auf eine über den Winkel gleichmäßige Verteilung der Abtastpunkte unter Einbeziehung der Stützstellen bei  $\varphi = 0^\circ$  und  $\varphi = 180^\circ$  beschränkt. Im Anhang II sind diese Bestimmungsgleichungen für 2 (bei  $0^\circ, 180^\circ$ ), 4 (bei  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ), 6 (bei  $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$ ), 8 (bei  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$ ) und 12 (bei  $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ$ ) Stützstellen für ein Koeffizientensystem  $a_k$  und  $b_k$  zusammengefaßt.

In Gl. 5 ist nun eine Separation, wie in Gl. 1 postuliert, erreicht:

- $I_{E0}$  ist ein winkelunabhängiges und abstandsunabhängiges Maß für die Quellstärke. Aus der Reihenentwicklung folgt, daß sich  $I_{E0}$  stets als der Mittelwert der Quellintensität auf dem Kreis bestimmt, also sehr leicht zu bestimmen ist.  $I_{E0}$  ist die Kenngröße der Wahl zur Charakterisierung der Quellstärke eines Mündungskalles<sup>6</sup>.
- $R_E$  beschreibt ausschließlich die Richtwirkung ohne Abhängigkeit von der Quellstärke und ist deshalb mit seinem Koeffizientensystem, dem Spektrum der Richtcharakteristik, die Kenngröße der Wahl zur Beschreibung der Richtcharakteristik des Mündungskalles.

### 3.2.3 Aspekte der Verwendung von Richtspektren der Intensität

#### Spiegelsymmetrie

Die oben zunächst ausgesetzte Nutzung der Spiegelsymmetrie des Mündungskalles um die Schießrichtung führt zu der einfachen Bedingung

$$s_k = 0 \quad \forall k \tag{Gl. 6}$$

Die Gültigkeit dieser Forderung kann also bei einer Rundum-Messung mit Hilfe der Gl. 6 quantifiziert und überprüft werden.

<sup>5</sup> Dieses Konzept der mathematischen Darstellung der Richtcharakteristik hat überragende Vorteile, weil sich alle mathematischen Gesetze und Verfahren, die für die Spektralanalyse von Zeitsignalen bereitgestellt sind, direkt auf dieses Konzept übertragen lassen. Dies gilt insbesondere im Hinblick auf die Messung der Richtcharakteristik an diskreten Stützstellen (Abtastwerte, Abtasttheorem), die Berechnung von Zwischenwerten (Rücktransformation) und der Mittelung bzw. Glättung von Richtcharakteristiken (Filterung). Es wird hier bewußt auf die Einführung der Fourier-Transformation in Integralform verzichtet, um die praktischen Aspekte und Vorteile dieses Konzeptes besser herausstellen zu können. Ein wesentliches Argument für die diskrete Reihenentwicklung ist die bei der Messung von Richtcharakteristiken von Mündungskallen geringe Anzahl von Stützstellen: Für eine geringe Anzahl von Stützstellen lassen sich für die Reihenentwicklung einfache algebraische Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten und damit des Spektrums angeben.

<sup>6</sup> An dieser Stelle soll vorsorglich betont werden, daß aus der formalen Ähnlichkeit der Bestimmung von  $I_{E0}$  mit der Schalleistung bzw. mit dem Schalleistungspegel in einigen Regelwerken nicht eine Äquivalenz zwischen beiden Kenngrößen folgt. Dieser Aspekt wird in Abschnitt 3.2.5 eingehend diskutiert.

**Anzahl der Entwicklungskoeffizienten**

Je mehr Stützstellen man zur Bestimmung der Richtcharakteristik einsetzt, um so mehr Koeffizienten werden bestimmt. Die entscheidende Frage, ob die Richtcharakteristik ausreichend fein abgetastet wurde, läßt sich daran messen, wie schnell die Koeffizienten höherer Ordnungen gegen 0 gehen. (Natürlich ist die Gültigkeit dieser Aussage durch das Abtasttheorem beschränkt.)

**Reduzierung der Feinstruktur**

Ist man an der Feinstruktur einer Richtcharakteristik nicht interessiert, kann man bei diesem Konzept die Richtcharakteristik dadurch glätten, daß man höhere Entwicklungskoeffizienten zu 0 setzt; dies entspricht einer Tiefpaßfilterung. Entscheidend dabei ist, daß dadurch die Quellintensität - und damit die in die Nachbarschaft verteilte akustische Energie - nicht verändert wird, sondern nur ihre Verteilung in der Fläche.

Die Beschreibung von Richtcharakteristiken durch Spektren ist eindeutig und nachvollziehbar. Das Konzept eignet sich deshalb auch für Regelwerke, da sich beispielsweise über eine Vorgabe der Anzahl der Koeffizienten die Mindestanforderungen an die Genauigkeit der Angabe der Richtcharakteristik und der Abbildung der Feinstruktur eindeutig festlegen lassen.

**Vergleich von Quellen**

Mit Hilfe dieser Kenngrößen des Mündungsknalles lassen sich Knalle konkret vergleichen und Vergleiche verbalisieren. Die häufig sehr unspezifiziert benutzte Aussage, daß eine Waffe „lauter“ sei als die andere, kann man anhand des Vergleichs der Zahlenwerte des  $I_{E0}$  oder des daraus abgeleiteten Quellstärkepegels quantifizieren.<sup>7</sup>

Mit Hilfe des Spektrums können die Richtwirkungen verschieden „lauter“ Knalle gemittelt und auf Gemeinsamkeiten analysiert werden. Es kann damit beispielsweise die Frage im Zusammenhang mit den Mündungsknallen schießender Waffen beantwortet werden, ob die Lauflänge die Richtwirkung oder die Quellstärke beeinflusst und ob Richtwirkungen beispielsweise von Gewehren in nur wenige Klassen aufgeteilt werden können.

**Negative Energieflüsse**

Die Reihenentwicklung der Intensität gilt sowohl für Quellen als auch für Senken. Deshalb kann es vorkommen, daß bei einer bestimmten Winkelabtastung in einigen Winkelbereichen negative Intensitäten beschrieben werden, der Quelle also dort die Eigenschaft einer Senke unterstellt wird. Dies ist in der Regel ein starker Hinweis darauf, daß die Richtcharakteristik nicht fein genug abgetastet wurde. Ein analoges Beispiel aus der Reihenentwicklung von Zeitsignalen soll das verdeutlichen.

Das periodische Öffnen und Schließen des Schalters S in Abb. 2 führt zu einem Gesamtstrom aus der Quelle, der einem um den Ruhestrom verschobenen Rechtecksignal entspricht; das Signal ist stets positiv. Bei der groben Abtastung des Signals und einer anschließenden Berechnung des Spektrums kann dann auch das rücktransformierte Zeitsignal negative Ströme für einige Zeitbereiche liefern. Entscheidend dabei ist aber eigentlich nicht dieser negative Strom, sondern das systemimmanente Überschießen, das von der Steilheit des Überganges abhängt.

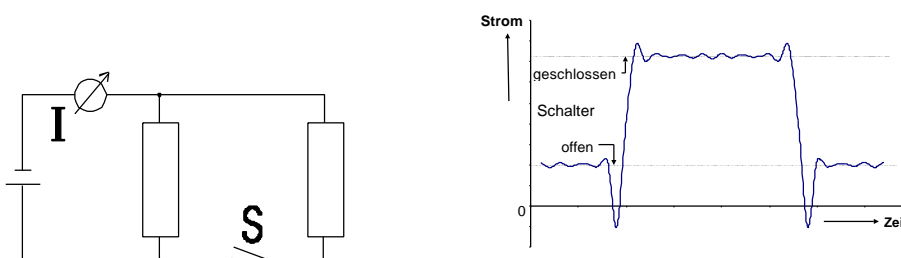


Abb. 2: Einfacher Schaltkreis (links) und Strom-Zeitdiagramm bei diskreter Abtastung (rechts)

Überträgt man dies auf die Reihenentwicklung von Richtcharakteristiken, bedeutet ein starkes Überschießen - unabhängig davon, ob dabei die Null unterschritten wird -, daß offensichtlich der Intensitätsunterschied zwischen zwei Meßpositionen sehr groß war. Dies wiederum legt den Schluß nahe, daß die Richtcharakteristik eine Feinstruktur enthält, die man durch die gewählte Abtastung noch nicht zuverlässig abgebildet hat. Negative Zwischenwerte für die Intensität sind deshalb ein klarer Hinweis auf ungenügende Abtastung.

<sup>7</sup> Diese Aussage bleibt dennoch irreführend, weil sich „laut“ auf Immissionspegel und auf das menschliche Hören bezieht.

### 3.2.4 Formale Übertragung der Emissionskenngrößen auf Schallpegel

Im Hinblick auf eine Pegelgleichung zur Festlegung eines Ausbreitungsmodells ergibt sich als emissionswirksamer Intensitätspegel in Richtung  $\varphi$

$$L_E(\mathbf{j}) = L_{E0} + D_I(\mathbf{j}) \tag{Gl. 7}$$

mit 
$$L_{E0} = 10 \lg \left( \frac{I_{E0}}{1 \text{ pW/m}^2} \right) \tag{Gl. 8}$$

und 
$$D_I(\mathbf{j}) = 10 \lg \left[ 1 + \sum_{k>0} [c_k \cos(k\mathbf{j}) + s_k \sin(k\mathbf{j})] \right] \tag{Gl. 9}$$

Die Bestimmungen der  $c_k$  und  $s_k$  für die zur Messung der Richtcharakteristik typisch gewählten Meßanordnungen sind in Anhang II angegeben. Bei den Mündungsknallen der meisten Waffen wird man sich auf die Angabe der  $c_k$  ( $k = 1$  bis  $4$ ) beschränken können. Dies ist eine einfache und eindeutige Beschreibung rotationssymmetrischer Mündungsknalle.

### 3.2.5 Die Schalleistung der Quelle

Die Schalleistung oder der Schalleistungspegel wird bei kontinuierlich abstrahlenden Quellen häufig zur Beschreibung der Quellstärke herangezogen. Zur meßtechnischen Bestimmung der Schalleistung gibt es deshalb ein detailliertes Regelwerk.

Die Schalleistung  $W$  ist das Integral der Intensität  $I$  auf der  $dF$  über eine die Quelle umschließende Fläche  $F$ , also

$$W = \int_F I(r, \mathbf{j}, \mathbf{q}) dF \tag{Gl. 10}$$

Auch der Ausdruck für die Schalleistung läßt sich unter Verwendung der Rotationssymmetrie der Mündungsknalle auf ein ebenes Problem vereinfachen. Als Integrationsfläche bietet sich eine Kugeloberfläche an. Dann bedeutet die Rotationssymmetrie um die Achse  $\varphi = 0$ , daß die Intensität im Abstand  $r$  unter dem Winkel  $\varphi$  auf einer Kugelschicht konstant ist. Das Flächendifferential  $dF$  ist durch die differentielle Mantelfläche der Kugelschicht zu ersetzen

$$dF = 2\pi r^2 \sin \mathbf{j} d\mathbf{j} \tag{Gl. 11}$$

Als Integrationsgrenzen - nun für den Winkel  $\varphi$  - ergeben sich  $0$  bis  $\pi$ . Hier kann wieder auf die Vektorschreibweise verzichtet werden, da die Intensität  $I$  an jeder Stelle in Richtung  $dF$  zeigt. Für die Schalleistung folgt

$$W = 2\pi r^2 \int_0^\pi I(r, \mathbf{j}) \sin \mathbf{j} d\mathbf{j} \tag{Gl. 12}$$

Nach Einführung der emissionswirksamen Quellintensität  $I_E$  ergibt sich

$$W = 2\pi r_0^2 \int_0^\pi I_E(\mathbf{j}) \sin \mathbf{j} d\mathbf{j} = 2\pi r_0^2 I_{E0} \int_0^\pi R_E(\mathbf{j}) \sin \mathbf{j} d\mathbf{j} \quad \text{mit } r_0 = 1m \tag{Gl. 13}$$

Der nun abgeleitete Ausdruck für die Schalleistung macht deutlich, daß in dieser Formulierung der Richtcharakteristik die Schalleistung nicht unabhängig von der Richtcharakteristik selbst ist.

Für

$$R_E \equiv 1 \tag{Gl. 14}$$

liefert das Integral gerade den Faktor 2. Dann bestätigt Gl. 13 in Verbindung mit der Tatsache, daß sich  $I_{E0}$  stets als Mittelwert der Intensitäten ergibt, die üblicherweise in Regelwerken als Ausgangspunkt angeführte Näherung für die Berechnung der Schalleistung. Die Näherung gilt auch noch exakt für Richtcharakteristiken, bei denen lediglich  $c_1 \ll 0$  ist, weil der Integralbeitrag stets 0 ist.

Richtcharakteristiken mit bestimmter Feinstruktur haben jedoch erheblichen Einfluß auf die Bestimmung der Schalleistung. Mit Hilfe der Reihenentwicklung für  $R_E$  für den Fall der Spiegelsymmetrie läßt sich der Beitrag der einzelnen Ordnungen explizit angeben.

$$c_k \int_0^p \cos(k\mathbf{j}) \sin(\mathbf{j}) d\mathbf{j} = \frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} c_k \tag{Gl. 15}$$

Nach Gl. 15 verschwindet die Korrektur für jede ungerade Ordnung in  $k$ . Für  $k=2$  ergibt sich beispielsweise  $c_2 = -2/3$ , für  $k=4$  entsprechend  $c_4 = -2/15$ .

Die Schalleistung ist deshalb hier keine geeignete Kenngröße der Quelle, mit der sich ein Separationsansatz nach Gl. 1 durchhalten läßt<sup>8</sup>. Dennoch ist die Schalleistung natürlich eine entscheidende Kenngröße des Mündungskalles. Die Schalleistung ist die akustische Kenngröße, die – einen konstanten Wirkungsgrad unterstellt – mit denjenigen Kenngrößen der Waffe korrelieren, welche die Gesamtenergie beim Abschuß beschreiben, also ansatzweise die kinetische Energie des Geschosses oder der Energieinhalt der Treibladung. Die emissionswirksame Intensität kann im allgemeinen nicht mit diesen Größen korrelieren, weil ihre Richtcharakteristik bei der hier betrachteten Symmetrie eine Rolle spielt.

Bei gegebener Richtcharakteristik der emissionswirksamen Intensität und bei gegebener Leistung<sup>9</sup> ergibt sich für

$$I_{E0} = \frac{W}{2p \left( 2 + \sum_{k>0} \frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} c_k \right)} \tag{Gl. 16}$$

Aus Gl. 16 folgt, daß bei dipolartig oder quadrupolartig eingeschnürten Richtcharakteristiken sich die Richtcharakteristik nachhaltig auf die Leistungsbestimmung auswirkt.

### 3.3 Der richtungsabhängige Intensitätspegel

#### 3.3.1 Additiver Separationsansatz

In Gl. 7 wurde bereits mit

$$L_E(\mathbf{j}) = L_{E0} + D_I(\mathbf{j})$$

eine hier mit ‚additiver Separationsansatz‘ bezeichnete Eingangsgleichung vorgestellt. Dieser Ansatz wurde aber in Abschnitt 3.2.4 auf der Basis der Intensität durch eine formale Pegelbildung erreicht. Der Ansatz läßt sich aber auch durch eine direkte Verwendung von Pegeln erfüllen. In Abschnitt 3.2 wurden bereits alle Schritte behandelt, die nun notwendig sind, um eine ‚Pegelrichtcharakteristik‘ zu definieren.

#### 3.3.2 Reihenentwicklung für Intensitätspegel

Durch eine Anwendung der Reihenentwicklung auf den im Abschnitt 3.2.4 definierten emissionswirksamen Intensitätspegel ergibt sich aus Gl. 3 und der formalen Ersetzung  $L_0 = a_0$  und Umbenennen der Koeffizientensysteme  $l_k = a_k$  bzw.  $m_k = b_k$  die Darstellung

$$L_E(\mathbf{j}) = L_0 + \sum_{k>0} [l_k \cos(k\mathbf{j}) + m_k \sin(k\mathbf{j})] \tag{Gl. 17}$$

<sup>8</sup> Die Aussage gilt nur in diesem Kontext und nur für die hier vorgestellte mathematische Darstellung der Richtcharakteristik. Im Dreidimensionalen läßt sich sehr wohl eine Darstellung finden (nämlich z.B. die Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen, s. /2/), die eine umfassende Separation liefert. In diesem Fall jedoch, in dem man die Rotationsymmetrie der Quelle nutzt, um eine vereinfachte Beschreibung in der Ebene zu finden, erfüllt entweder die Schalleistung oder die Intensität den Separationsansatz. Hier wurde die Intensität als Kenngröße benutzt, weil sie der Messung eher zugänglich ist und weil die Intensität die Zielgröße der Prognose ist.

<sup>9</sup> Bei einem Einzelereignis würde man unter Schalleistung eigentlich eine Kenngröße zur Beschreibung der Energieabstrahlung in Abhängigkeit von der Zeit verstehen. Hier jedoch wird unter Schalleistung die auf eine Zeiteinheit bezogene akustische Energie des Ereignisses betrachtet, also eine zeitunabhängige Größe.

Auf eine nähere Ausführung wird hier verzichtet. Augenscheinlich ist jedoch sofort, daß  $L_0$  als arithmetischer Mittelwert der Schallpegel bestimmt wird und damit nicht etwa mit  $L_{E0}$  übereinstimmt. Die  $l_k$  und  $m_k$  sind selber Pegel. Um einen späteren Vergleich mit der unter Abschnitt 3.2 vorgestellten Beschreibung vorzubereiten, soll noch ein Korrekturterm  $l_0$  eingeführt werden. Die erreichte Darstellung, die den ersten Summanden als schon den aus Gl. 7 bzw. Gl. 8 enthält, ergibt.

$$L_E(\mathbf{j}) = L_{E0} + l_0 + \sum_{k>0} [l_k \cos(k\mathbf{j}) + m_k \sin(k\mathbf{j})] = L_{E0} + D_L(\mathbf{j}) \quad \text{Gl. 18}$$

Der Korrekturterm  $l_0$  ergibt sich als Differenz zwischen dem arithmetischen und dem energetischen Mittelwert der Pegel. Man kann diesen Term auch als Renormierung der Richtcharakteristik interpretieren, die dafür sorgt, daß die durch die arithmetische Rechnung mit Pegeln in die Umgebung verteilten geringeren oder überschüssigen Pegel wieder auf die physikalische Gesamtintensität korrigiert werden.

### 3.3.3 Vorschlag der ‚Richtlinie zur Prognose von Schießgeräuschmissionen‘

Das in der ‚Richtlinie zur Prognose von Schießgeräuschmissionen‘ der Hessischen Landesanstalt für Umwelt, /6/, vorgeschlagene Verfahren zur Darstellung einer Richtcharakteristik ist ein Interpolationsverfahren, das auf der Reihenentwicklung nach Kreisfunktionen der hier als emissionswirksamer Schallintensitätspegel bezeichneten Kenngröße beruht. In /6/ ist das Verfahren formal auf spiegelsymmetrische Richtcharakteristiken und auf 3 kennzeichnende Parameter beschränkt.

Wenn die Meßwinkel entsprechend einer gleichmäßigen Abtastung gewählt sind, Spiegelsymmetrie vorliegt und die Anzahl der Parameter<sup>10</sup> nicht beschränkt wird, sind die in /6/ definierten Elemente  $g_k$  des Koeffizientenvektors  $\mathbf{g}$  identisch mit dem oben abgeleiteten Richtungsspektrum  $l_k$  einschließlich des Korrekturtermes  $g_0$  bzw.  $l_0$ . Dann kann die in /6/ vorgeschriebene aufwendige Rechnung durch die in Anhang II gegebenen Gleichungen ersetzt werden.<sup>11</sup>

Das Interpolationsverfahren ist formal nicht auf eine gleichmäßige Abtastung der Emission auf einem Halbkreis beschränkt, allerdings sollten die Meßpunkte auch bei diesem Verfahren – wie die Richtlinie auch vorgibt – der gleichmäßigen Aufteilung nahe kommen, weil die Interpolation sonst nicht zuverlässig ist.

## 3.4 Vergleich der Richtspektren der Intensität und des Intensitätspegels

Zunächst ist festzustellen, daß wegen der Periodizität des Problems das System der Kreisfunktionen das sachgerechte Funktionensystem ist, in dem eine Richtcharakteristik für ebene Probleme beschrieben werden sollte. Jede andere mathematische Beschreibung kann nur dann geeigneter sein, d.h. mit weniger Parametern die Richtwirkung zuverlässiger beschreiben, wenn ein Vorwissen über Richtwirkung einer Quelle vorhanden ist.

Den Richtspektren der Intensität und des Intensitätspegels (dazu gehört auch die Fourier-Interpolation) sind alle Vorteile gemeinsam, die sich aus den Eigenschaften des Spektrums allgemein ergeben. Diese sind in Abschnitt 3.2.3 angedeutet. Beide Richtspektren konvergieren immer besser in ihren Aussagen, wenn die Anzahl der Abtastpunkte vergrößert wird.

Die Vorteile der Reihenentwicklung der Intensität liegen in der klaren, physikalisch sachgerechten Trennung zwischen der Quellstärke und der Richtwirkung.  $I_{E0}$  ergibt sich direkt aus der Entwicklung. Die Interpolation der Zwischenwerte erfolgt arithmetisch im Hinblick auf die Intensität und entspricht deshalb der ‚energetischen‘ Pegelrechnung. Der wesentliche Nachteil dieses Verfahrens ist, daß die Bedingung, daß die emissionswirksame Intensität der Quelle hier stets positiv sein soll, im Spektrum nicht formulierbar ist. In Abschnitt 3.2.3 ist die Bedeutung dieser Tatsache und auch ihr Nutzen erläutert.

Der Vorteil der Reihenentwicklung der Intensitätspegel liegt gerade darin, daß sie systemimmanent das Vorzeichen des Energieflusses nicht enthält und deshalb stets eine von der Quelle weg gerichtete Intensität beschreibt. Der wesentliche Nachteil dieses Verfahrens liegt darin, daß es gerade die ‚energetische‘ Pegelrechnung nicht unterstützt, sondern die Interpolation von Zwischenwerten im Hinblick auf die Pegel arithmetisch bildet. Deshalb benötigt dieses Verfahren einen Korrekturkoeffizienten, der wenigstens im Hinblick auf die gesamte, rund-

<sup>10</sup> Die Anzahl entspricht der Dimension des dort definierten Parametervektors  $\mathbf{g}$

<sup>11</sup> Die in /6/ als ‚emissionswirksamer Schalleistungspegel‘ bezeichnete Kenngröße ist eigentlich kein Maß für die von der Quelle abgegebene Schalleistung, sondern entspricht vielmehr der hier als ‚emissionswirksamer Intensitätspegel‘ definierten Kenngröße.

um verteilte Intensität diese Pegelarithmetik ausgleicht. Die Interpolation bleibt dennoch arithmetisch. Diese Darstellung unterstützt nicht die Berechnung der Schalleistung, auch nicht für den Fall der Rotationssymmetrie der Quelle.

Diese Diskussion soll hier nicht mit einer Empfehlung abgeschlossen werden. In /7/ wurde beispielsweise die Richtwirkung für die dort behandelten Waffenknalle über die Reihenentwicklung von Pegeln eingeführt. Bei vielen Knallen reicht dort die Angabe weniger Entwicklungskoeffizienten. Für einige ausgeprägt gerichtete Knalle ist allerdings ein Spektrum mit erheblicher Feinstruktur erforderlich. In der Praxis der Lärmprognose ist deshalb die Wahl der Darstellung des Richtspektrums<sup>12</sup> weniger entscheidend als eine gegebenenfalls angestrebte Beschränkung auf Symmetrie und/oder die Anzahl der anzugebenden Entwicklungskoeffizienten. Entscheidend ist auch, daß die Messung der Intensität sachgerecht erfolgt.

## 4 Messung der Richtcharakteristik des Mündungsknalles

### 4.1 Vorbemerkungen zur Intensität

Bisher wurde der Begriff Intensität benutzt, ohne ihn konkreter zu definieren. Während die Schalleistung und die Schallenergie Größen sind, welche die Quellstärke kennzeichnen, kennzeichnet die Intensität oder die Energiedichte die Schallimmission, den Schalleintrag. Gegenstand dieses Abschnittes ist die Ableitung einer Bestimmungsvorschrift für die Intensität, aus der sich mit Hilfe von Gl. 2 die emissionswirksame Intensität ermitteln läßt.

Die in Gl. 2 benötigte Intensität läßt sich aus Gl. 19 ermitteln.

$$I_Q(\underline{r}) = \frac{1}{t_0} \int_T p_Q(\underline{r}, t) v_Q(\underline{r}, t) dt \tag{Gl. 19}$$

In Gl. 19 ist  $I_Q(\underline{r})$  die Intensität an der Stelle  $\underline{r}$ , die allein und direkt von der Quelle herrührt. Entsprechend sind  $p(\underline{r}, t)$  und  $v(\underline{r}, t)$  der Schalldruck bzw. die Schallschnelle von der Quelle. Die Integration ist über die gesamte Dauer des Einzelereignisses zu erstrecken. Das Ergebnis der Integration ist eigentlich eine Energiedichte, die aussagt, wieviel Energie pro Flächeneinheit bei dem Einzelereignis von der Quelle eintrifft. Durch Division durch die Zeiteinheit  $t_0 = 1$  s wird daraus formal eine zeitlich gemittelte Intensität<sup>13</sup>. Im Hinblick auf die Ortsabhängigkeit wird nicht gemittelt. Gl. 19 beschreibt deshalb einen mit allen Mängeln eines Abtastwertes behafteten Meßwert einer periodischen Funktion um die Quelle herum.

Aus Gl. 19 wird deutlich, daß zur Bestimmung von  $I_Q$  der Schalldruck und die Schallschnelle bestimmt werden müssen. Da vorausgesetzt ist, daß diese Messung im Fernfeld durchgeführt wird, läßt sich die Bestimmung der Schallschnelle dann durch die Näherung in Gl. 20 ersetzen ( $\rho c$  ist die Kennimpedanz der Luft).

$$I_Q(\underline{r}) = \frac{1}{t_0} \frac{1}{\rho c} \int_T p_Q^2(\underline{r}, t) dt \tag{Gl. 20}$$

Diese Fernfeld-Näherung hat zwei Aspekte bei der Messung von Mündungsknallen. Einerseits sollte das Schallfeld selbst bereits so konditioniert sein, daß nichtlineare Effekte vernachlässigt werden können. Andererseits

<sup>12</sup> Es ließen sich Beispiele angeben, bei der sowohl die eine wie auch die andere Darstellung offensichtlich nicht sachgerechte – hier sachgerecht im Hinblick auf eine Lärmprognose des Schießlärms - Interpolationen liefern. Dieser Schluß läßt sich umkehren: Wenn beide Darstellungen im Rahmen eines zu bestimmenden Pegelbereichs übereinstimmende Ergebnisse liefern, sind nicht nur beide Verfahren anwendbar, sondern sie liefern dann auch eine sachgerechte Interpolation. Dieser Schluß ist hier nicht zu beweisen; Allerdings bestätigt eine vergleichende Darstellung gemessener Richtcharakteristiken mit beiden Verfahren in der Regel diese Behauptung.

<sup>13</sup> Diese Definition folgt also dem Konzept sogenannter äquivalenter Dauerschallpegel, die eigentlich für die Beschreibung von Knallereignissen nicht sachgerecht sind. Das Durchhalten dieses Konzeptes, besonders in Verbindung mit der formalen Übertragung von Eigenschaften von Energiepegeln auf Maximalpegel (Regeln der Addition und Mittelung) sind Ursache und Quelle vieler Hilfsdefinitionen und Unsicherheiten in den entsprechenden Regelwerken. Der konsequente Übergang zu Energiepegeln würde die physikalisch-akustische Seite der Behandlung von Schießgeräuschen erheblich vereinfachen und klare Definitionen ermöglichen. Schon beispielsweise die Einführung eines immissionswirksamen Schalleistungspegels als  $L_{WAFmax}$  ist in sich unklar und eigentlich widersprüchlich, schon allein deshalb, weil durch den Zusatz ‚immissionswirksam‘ dieser Größe jeder Bezug zur physikalischen Schalleistung genommen wird.



sollte die Messung soweit von der als Kugelstrahler nullter Ordnung betrachteten Ersatzschallquelle entfernt sein, daß die Impedanz der eigentlich vorliegenden Kugelschallwellen durch die Impedanz einer ebenen Welle ersetzt werden darf. Erfahrungsgemäß ist die erste Bedingung für die Bestimmung der Signalenergie hinreichend erfüllt, wenn der Spitzenschalldruck des Knallsignals kleiner ist als 150 dB. Eine Abschätzung der zweiten Bedingung ergibt für eine untere noch interessierende Grenzfrequenz für Handfeuerwaffen von 50 Hz (schwere Waffen 2 Hz) einen Restfehler von ca. 1% in der Impedanz in einem Abstand von 10 m (250 m).

## 4.2 Meßanordnung

Da zunächst nichts über die Feinstruktur einer Richtcharakteristik des Mündungsknalles angenommen werden kann, ist es auch im Hinblick auf die vorausgesetzte Rotationssymmetrie und der daraus folgenden angestrebten Beschreibung der Richtcharakteristik sachgerecht, die Messung auf einem Halbkreis in gleichmäßig verteilten Abtastorten durchzuführen. Die Schießrichtung bildet dabei die Halbachse. Der Radius des Halbkreises sollte zwischen 5 m und 10 m betragen. Das Gelände sollte so gewählt sein, daß der Mündungsknall von anderen Signalen, z.B. Reflexionen von Aufbauten in der Nachbarschaft, so deutlich im Zeitbereich getrennt ist, daß eine für die Auswertung der Signale hinreichend lange Signaldauer zur Verfügung steht<sup>14</sup>.

Bei typischen Meßanordnungen läßt sich eine Superposition des Mündungsknalles mit seiner Bodenreflexion nicht vermeiden. Dies führt zu konstruktiven und destruktiven Interferenzen im aufgenommenen Schalldrucksignal mit nachhaltigem Einfluß auf die Bestimmung der Intensität nach Gl. 20. In Gl. 20 ist die Bestimmung der Intensität des alleine von der Quelle herrührenden Schallfeldes vorgeschrieben. Der in einer typischen Meßposition aufgenommene Schalldruck ist aber die Summe der Schalldrucke zweier in verschiedenen Richtungen den Meßpunkt durchziehende Schalle, das integrierte Schalldrucksignal deshalb kein Maß für die Zielgröße in Gl. 20. Die Intensität der Quelle muß erst aus den Messungen des Schalldruckes abgeleitet werden.

## 4.3 Bemerkungen zur Bestimmung der Intensität der Quelle aus Schalldruckmessungen

Zur Bestimmung der Intensität des Direktschalles aus dem gemessenen Schalldrucksignal ist entweder eine zuverlässige Beschreibung der Eigenschaften des Bodens für die Reflexion von Kugelschallwellen für streifenden Einfall oder ein zuverlässiges physikalisches Modell der Quelle erforderlich. Typische Erdböden, z.B. Grasböden, zeichnen sich durch stark frequenzabhängige Reflexionseigenschaften aus, siehe beispielsweise /3/. Pauschal läßt sich bei dem hier häufig auftretenden streifenden Schalleinfall feststellen, daß Frequenzanteile < 100 Hz ‚schallhart‘, Frequenzanteile > 500 Hz typisch ‚schallweich‘ bei geringer Schallabsorption reflektiert werden. Unter Berücksichtigung der geometrischen Umwege beobachtet man dann Spektren des gemessenen Schalldrucksignals, die im tiefen Frequenzbereich durch Schalldruckverdopplung, sonst durch beide, spektrale Auslöschung und Verdopplung, geprägt sind.

Das weiter unten diskutierte Beispiel wird zeigen, daß sich mit Hilfe eines von Weber /8/ entwickelten Modells für Knallfunken auch die Spektren von Waffenknallen überraschend<sup>15</sup> zuverlässig beschreiben lassen. Es eignet sich für viele Waffenknalle als mathematischer Ansatz für das Quellspektrum. Dieses Modell hängt nur von der Größe einer gedachten, explosionsartig expandierenden Gaskugel zu jenem Zeitpunkt ab, zu dem die Ausdehnungsgeschwindigkeit der Kugel die Schallgeschwindigkeit unterschreitet und deshalb ab diesem Zeitpunkt Schall abstrahlen kann. Dieses Modell liefert auf der Grundlage der Thermodynamik eines idealen Gases und der Strahlungsimpedanz einer Kugel das Fourierspektrum des Schalldrucks  $p(\omega)$  einer Knallwelle in Abhängigkeit eines einzigen Parameters, des Radius der Kugel (Weber-Radius).

$$p(\omega) = \frac{P_w}{p} \left[ \frac{a}{a^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \right] \tag{Gl. 21}$$

<sup>14</sup> Dies hängt von der untersten Frequenz ab, die noch in die Analyse mit einbezogen werden soll.

<sup>15</sup> Die Anwendung dieses einfachen Modells für die Schallabstrahlung einer Explosion in Luft setzt eine beinahe schon beliebig zu nennende Anzahl von Vernachlässigungen und Vereinfachungen voraus. Die Bedenken gegen diesen Ansatz von akustischer Seite (z.B. Nichtlinearität des Vorganges), von der Seite der Abgangsbalistik (z.B. die Phänomenologie der Schockfronten beim Gasaustritt) und von der Seite der Munitionsbeschreibung (z.B. unterschiedliche Abbrandgeschwindigkeit) sind an dieser Stelle nicht auszuräumen. Die mit diesem Modell dennoch erreichte Zuverlässigkeit ist deshalb ‚überraschend‘.

$$a = \frac{3c}{R_w} \left[ 1 + \left( \frac{c}{w R_w} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

mit

Gl. 22

In Gl. 21 bzw. Gl. 22 bedeutet  $c$  die Schallgeschwindigkeit,  $j$  die imaginäre Einheit,  $w$  die Kreisfrequenz.  $P_w = 14,4 \text{ kPa}$  ist eine aus [8] übernommene, experimentell bestimmte Konstante.  $a$  ist eine das Spektrum charakterisierende Kreisfrequenz, die vom Weber-Radius  $R_w$  nach Gl. 22 abhängt. Mit Hilfe dieses Modells bzw. dem Ansatz des Quellspektrums für die hier betrachteten Waffenknalle und unter Berücksichtigung der Reflexion von Kugelschallwellen an ebenen, impedanzbehafteten Oberflächen läßt sich der Einfluß der Bodenreflexion eliminieren und damit die Intensität der Quelle allein bestimmen.<sup>16</sup>

Dies ist allerdings ein numerisch aufwendiges Verfahren, das nur dann erforderlich ist, wenn die Zielgröße das Spektrum der Intensität ist<sup>17</sup>. Für sogenannte energie-äquivalente Einzahlpiegel kann auf die Korrektur in der Regel verzichtet werden. Die Erfahrung zeigt, daß der gemessene Einzahlpiegel des Schalldruckpegels typisch 3 dB oberhalb des Pegels der Quelle allein anzunehmen ist, /5/. Diese Näherung gilt für Schallereignisse, die ihre wesentlichen spektralen Energieanteile nicht in Bereichen haben, in denen ausschließlich Schalldruckverdopplung oder –auslöschung vorherrscht<sup>18</sup>.

## 5 Beispiel: Gewehr Winchester .300

Die oben angedeuteten Methoden sollen am Beispiel einer Emissionsmessung einer Winchester .300 aufgezeigt werden. Die Messung wurde auf einem Halbkreis mit einer 30° Teilung durchgeführt. Der Radius betrug 7,8 m, die Quell- und Meßhöhe jeweils 1,5 m. Die Messung wurde über einer für die Sohle von Schießständen typischen Grasnabe durchgeführt. Die Schalldrucksignale der 7 Mikrophone wurden simultan aufgezeichnet.

Abb. 3 dokumentiert die Messung und Auswertung eines Einzelschusses. Die für jede Meßrichtung jeweils dargestellten drei Terzspektren haben folgende Bedeutung: Die Kreise markieren die Meßwerte für den auf eine Sekunde bezogenen Dauerschallpegel  $L_{eq, Terz}$ , also die spektrale Energiedichte des Signals. Die Balken zeigen die aus dem Modell resultierende Prognose für die gleiche Meßgröße unter optimaler Annahme der Randbedingungen<sup>19</sup>. Die Linie zeigt das Spektrum nach Gl. 21 im Meßabstand unter Berücksichtigung der bekannten Luftabsorption. Dieses Spektrum würde gemessen, wenn das Signal nicht durch die Bodenreflexion gestört würde. Dieses Spektrum ohne die Absorptionskorrektur, die hier nur in den höchsten Terzen Auswirkungen hat, ist aber auch an der Quelle erforderlich, um das Balkenspektrum aus der Überlagerung von Direktschall und Bodenreflexion zu ergeben. Die Hinweise ( $p^*p$ ) bzw. ( $p^*v$ ) an den Achsen sollen lediglich andeuten, daß das Balkenspektrum aus dem prognostizierten Schalldruckquadrat, das Linienspektrum aber aus dem akustischen Energiefluß von der Quelle allein abgeleitet ist. Die Übereinstimmung des gemessenen Spektrums mit dem Balkenspektrum ist unmittelbar ein Maß für die Qualität des Ansatzes eines Spektrum nach Gl. 21 zur Beschreibung der Quelle bei Anwesenheit nur einer einzigen Reflexion. Bei Anwesenheit mehrerer Reflexionen wird diese Übereinstimmung natürlich gestört.

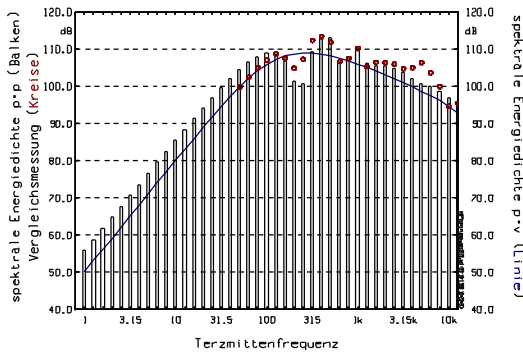
Zunächst ist festzustellen, daß die Form und der absolute Pegel der Spektrums des Mündungskalles über alles gesehen von einem Weber-Spektrum sehr gut beschrieben werden kann. Der hier gewählte Ausdruck 'sehr gut' berücksichtigt insbesondere die Tatsache, daß einerseits dieses Spektrum nur einen einzigen freien (anpaßbaren)

<sup>16</sup> Dieses Verfahren setzt allerdings mindestens Rotationssymmetrie voraus. Dann stammt die Bodenreflexion aus der gleichen Kugelschicht und hat daher dieselbe Quellintensität.

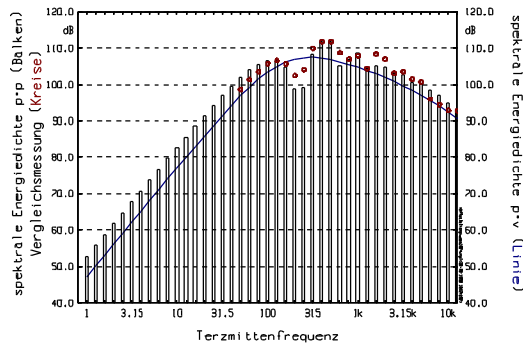
<sup>17</sup> Das Verfahren ist auch erforderlich, wenn die Zielgröße ein Spitzen- oder Maximalpegel ist und der zeitliche Abstand zwischen Direktschall und Bodenreflexion in Abhängigkeit von der Bestimmungsvorschrift des Pegels nicht hinreichend groß ist.

<sup>18</sup> Beispielsweise bei der Bestimmung von A-bewerteten Pegeln für die Mündungsknalle schwerer Waffen können die Korrekturen größer sein als 10 dB, weil dort die die A-Pegel bestimmenden spektralen Komponenten häufig durch destruktive Überlagerungen stark unterdrückt werden. Für Handfeuerwaffen gilt diese Näherung bei typischer Meßanordnung. Große Korrekturen können aber auch hier notwendig sein, wenn beispielsweise im liegenden Anschlag versucht würde, die Emission zu bestimmen oder der Radius des Meßkreises deutlich über 10 m gewählt wird.

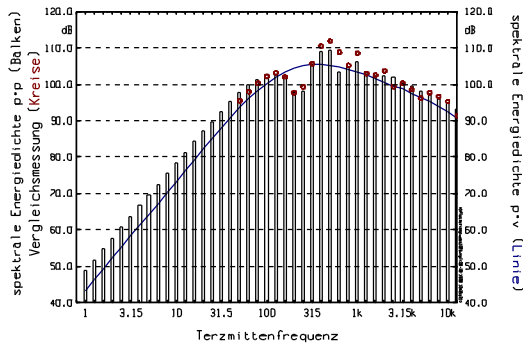
<sup>19</sup> Das Spektrum reagiert empfindlich auf Fehler in der Lagebeschreibung von Quelle und Empfänger oder Abweichung von der optimalen Beschreibung der Impedanz. Selbst kleinste geometrische Umwege oder reflexionsbedingte Phasenverschiebungen im Signal haben bei der Betrachtung von Kugelwellen an einer ebenen, impedanzbehafteten Oberfläche einen deutlich erkennbaren Einfluß auf die Phase des Spektrums.



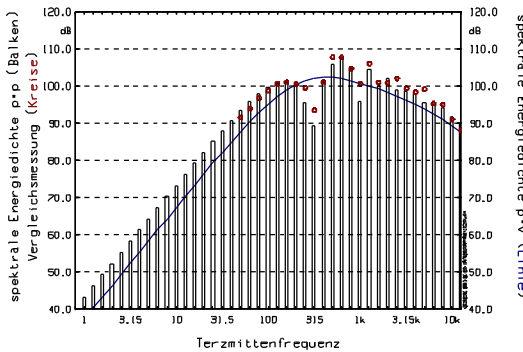
Kreise: LX=121,4 dB, AX=118,8 dB, CX=121,3 dB  
 (p\*p): LX=121,2 dB, AX=118,1 dB, CX=121,0 dB  
 (p\*v): LX=119,5 dB, AX=115,8 dB, CX=119,3 dB



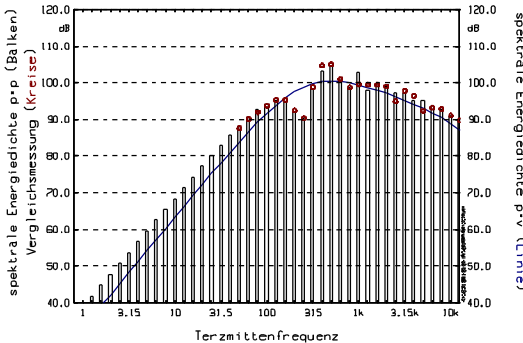
Kreise: LX=120,1 dB, AX=117,7 dB, CX=120,0 dB  
 (p\*p): LX=119,7 dB, AX=116,9 dB, CX=119,9 dB  
 (p\*v): LX=117,8 dB, AX=114,5 dB, CX=117,6 dB



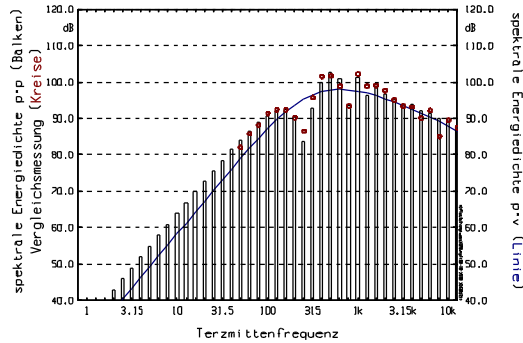
Kreise: LX=118,3 dB, AX=116,0 dB, CX=118,2 dB  
 (p\*p): LX=117,1 dB, AX=114,7 dB, CX=116,9 dB  
 (p\*v): LX=115,9 dB, AX=113,1 dB, CX=115,7 dB



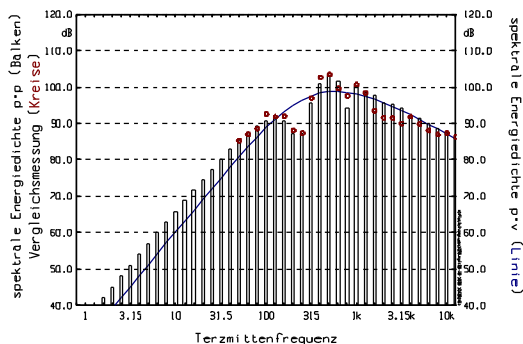
Kreise: LX=115,5 dB, AX=114,0 dB, CX=115,3 dB  
 (p\*p): LX=114,7 dB, AX=113,0 dB, CX=114,5 dB  
 (p\*v): LX=112,7 dB, AX=110,4 dB, CX=112,5 dB



Kreise: LX=112,0 dB, AX=110,3 dB, CX=111,8 dB  
 (p\*p): LX=112,0 dB, AX=110,5 dB, CX=111,8 dB  
 (p\*v): LX=110,8 dB, AX=109,0 dB, CX=110,6 dB



Kreise: LX=110,1 dB, AX=108,9 dB, CX=109,9 dB  
 (p\*p): LX=109,9 dB, AX=108,6 dB, CX=109,6 dB  
 (p\*v): LX=108,3 dB, AX=107,0 dB, CX=108,1 dB



Kreise: LX=109,9 dB, AX=107,8 dB, CX=109,8 dB  
 (p\*p): LX=109,9 dB, AX=108,5 dB, CX=109,8 dB  
 (p\*v): LX=108,9 dB, AX=107,4 dB, CX=108,8 dB

Abb. 3: Dokumentation der Emissionsmessung für den Mündungsknall einer Winchester .300 anhand der Terzspektren in den Meßrichtungen 0° (Schießrichtung), 30°, 60°, 90°, 120°, 150° und 180°

Meßabstand 7,8 m  
 Quell- und Meßhöhe 1,5 m  
 Kreise: Meßwerte des  $L_{eq, 1s, Terz}$   
 (p\*p): Prognosewerte des  $L_{eq, 1s, Terz}$   
 (p\*v): nur Direktschall  $L_{eq, 1s, Terz}$

Parameter, den Weber-Radius, bereitstellt. Andererseits handelt es bei einem Mündungsknall nicht um eine einfache Explosion, sondern um einen stark gerichteten Gasaustritt. Die Spektren sollen im Folgenden näher diskutiert werden:

Im tiefen Frequenzbereich bis etwa 80 Hz zeigen insbesondere die seitlichen und rückwärtig aufgenommenen Signale den vom Modell postulierten Anstieg des Pegels mit 30 dB pro Frequenzdekade. Bei den nach vorwärts gemessenen Spektren scheint dieser Anstieg steiler zu verlaufen. Ein Grund dafür liegt darin, daß zur Analyse des Mündungsknalles hier die zeitlich eng benachbarten Geschoßknalle (Direktschall und Bodenreflexion) den Analysezeitraum für den Mündungsknall begrenzen und so die tiefen Terzen zunehmend zu geringe Pegel aufweisen. Aus dem Vergleich der Linien mit den Balken ist zu erkennen, daß in diesem Frequenzbereich eine Schalldruckverdopplung vorliegt; die Balkenwerte liegen durchweg um 6 dB oberhalb der Linie. Diese Beobachtung ist im Einklang mit der Erfahrung, daß Erdböden für streifenden Schalleinfall und tiefe Frequenzen 'schallharte' Reflektoren sind.

Der erste Einbruch des Spektrums um die 200 Hz Terz und die dann sich zu den höheren Frequenzen fortsetzende 'Welligkeit' des Spektrum ist ebenfalls der Einfluß der Bodenreflexion auf die Schalldruckmessung des überlagerten Signals. Wiederum gibt die Differenz zur Linie an, in welchen Terzen konstruktive bzw. destruktive Superposition vorherrscht.

Je höher die Terzen sind, um so unzuverlässiger folgt das Balkenspektrum den Meßwerten. Dies kann auf zusätzliche, bei der Rückrechnung einer einzigen Reflexion nicht eliminierbare Reflexionen zurückgeführt werden.<sup>20</sup> Als zusätzlicher Reflektor tritt hier der Schütze hinzu. Einen weiteren Hinweis für den Einfluß des Schützen liefert insbesondere das 180°-Signal. Zu höheren Frequenzen wird die Abschirmung durch Kopf und Körper des Schützen immer effektiver, die Pegel müssen deshalb geringer sein. Die Linie beschreibt die Quelle daher auch hier glaubhaft.

Betrachtet man die Spektren im Hinblick auf akustische Bewertungen, wird deutlich, warum die Angabe von Emissionskennwerten nach einer einfachen Messung je nach Meßaufbau, z.B. im AFmax, erhebliche Spanne aufweisen können. Die Bodenreflexion stört gerade im Energieschwerpunkt das Spektrum und gerade da, wo die A-Bewertung ganz wesentlich die Terzen bewertet. Insbesondere wird die A-Bewertung den Energieschwerpunkt des Spektrums bei höheren Frequenzen bestimmen als dies in 'Wirklichkeit' der Fall ist. Dies kann nachhaltige Auswirkungen auf die Auslegung von Schallschutzmaßnahmen - beispielsweise bei der Bestimmung der Schirmwirkung - haben und hier zu sub-optimalen Maßnahmen führen.

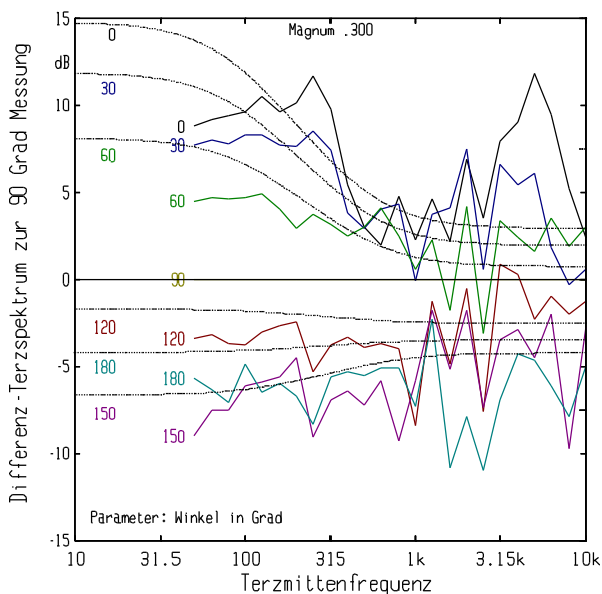


Abb. 4: Gemessene (—) und berechnete (---) Richtcharakteristik des Mündungsknalles der Winchester .300 als Differenzspektrum zur 90°-Richtung

Aus Abb. 3 kann die Richtwirkung nicht direkt entnommen werden. Deshalb sind in Abb. 4 die Differenzen der gemessenen Terzspektren bzw. der in Abb. 3 als Linie dargestellten prognostizierten Quellspektren zur 90° Messung dargestellt. Man erkennt nun deutlicher, daß die Richtwirkung insbesondere in den tiefen Frequenzen stark ausgeprägt ist, während sie in zu höheren Frequenzbereichen tendenziell kleiner wird. Eine Ausnahme bildet hier wiederum die 180°-Messung wegen der Abschirmung dieses Meßpunktes durch den Schützen. Auch in dieser Darstellung ist wieder erkennbar, daß in Vorwärtsrichtung die tiefen Frequenzen im Vergleich zum Modell kleiner ausfallen.

<sup>20</sup> Es kann natürlich nicht ausgeschlossen werden, daß das Quellspektrum in den betroffenen Terzen nicht wirklich mehr oder weniger Energie enthält. Allerdings zeigen die hier nicht präsentierten Ergebnisse bei Sprengungen diese Effekte nicht. Die These ist daher zumindest wahrscheinlich.

Diese Interpretationen für die gemessenen Spektren werden durch die in den einzelnen Terzen unterschiedlich wirksame konstruktive bzw. destruktive Superposition erheblich erschwert. Die Differenzbildung sollte im Idealfall bei stets gleicher Geometrie und sonstiger Randbedingungen diese Einflüsse aus den Spektren nehmen. Aber gerade bei der Reflexion von Kugelwellen an impedanzbehafteten Oberflächen haben auch geringste Laufstreckenunterschiede bzw. Phasendrehungen einen erheblichen Einfluß, vgl. /3/.

Aus den in Abb. 3 ebenfalls angegebenen Einzahlwerten lassen sich die Entwicklungskoeffizienten der Richtcharakteristik bestimmen. Tab. 1 gibt exemplarisch die Koeffizienten für Entwicklung des emissionswirksamen Schallintensitätspegels nach Gl. 17 an (vgl. im Anhang II die Berechnungsvorschrift für diese Koeffizienten für eine Messung an 12 Punkten). Ebenfalls angegeben ist der nach Gl. 16 berechnete, bewertete Schalleistungspegel.

Bewertung	$L_0$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$l_5$	$l_6$	$L_W$
L	113,28 dB	5,36 dB	0,40 dB	0,07 dB	0,17 dB	-0,13 dB	0,35 dB	114,2 dB
C	113,09 dB	5,34 dB	0,42 dB	0,05 dB	0,18 dB	-0,14 dB	0,35 dB	114,0 dB
A	110,93 dB	4,23 dB	0,30 dB	0,03 dB	0,07 dB	-0,08 dB	0,30 dB	111,5 dB

Tab. 1 Entwicklungskoeffizienten der Richtcharakteristik für den emissionswirksamen Intensitätspegel und Schalleistungspegel

Abb. 5 zeigt die unbewerteten (L) Richtcharakteristiken des .300 Winchester berechnet für die Intensität bzw. Intensitätspegel jeweils in einem Pegel-Polardiagramm. Beide Richtcharakteristiken zeigen in dieser Darstellung eine gute Übereinstimmung. Abb. 6 zeigt die gefilterten Richtcharakteristiken bei Beschränkung auf die Koeffizienten  $l_0$  bis  $l_3$  bzw.  $a_0$  bis  $a_3$ . Nun zeigen sich in dieser Darstellung im rückwärtigen Bereich der Waffe deutliche Unterschiede. Es muß darauf hingewiesen werden, daß die auffällige Welligkeit der Intensität nur in dieser Pegeldarstellung so hervortritt. Bei linearer Darstellung der Intensität ist dies wegen der relativ kleinen Werte in diesem Bereich nicht auffällig.

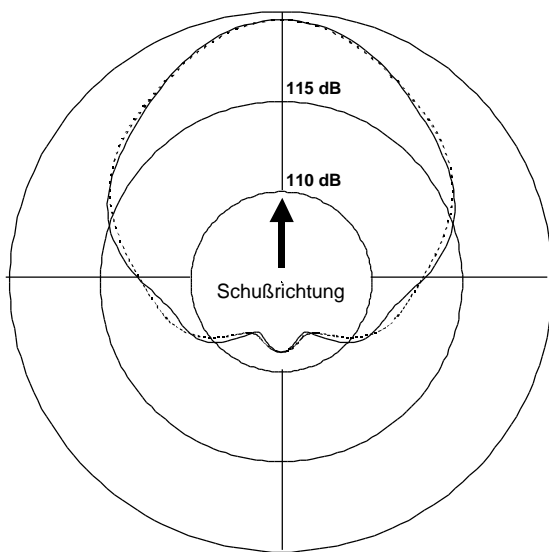


Abb. 5: Richtcharakteristik der Intensität (durchgezogene Linie) und des Intensitätspegels (gestrichelte Linie) in einem Pegeldiagramm

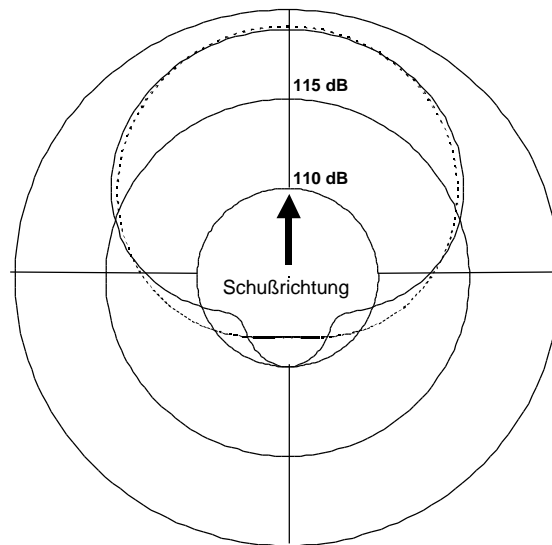


Abb. 6: Richtcharakteristik der Intensität (durchgezogene Linie) und des Intensitätspegels (gestrichelte Linie) in einem Pegeldiagramm, "gefiltert" bis  $a_2$  bzw.  $l_2$

## 6 Abschließende Bemerkungen

Die internationale Diskussion zur Prognose von Schießlärm hat sich im letzten Jahrzehnt auf zwei Gebiete konzentriert: zum einen auf die Ausbreitung von Schallimpulsen im Freien und zum anderen auf die sachgerechte Beurteilung der Schallimmission im Hinblick auf die Belästigung. Auf dem Gebiet der Schallausbreitung hat sich der Wissensstand erheblich erweitert. Gerade durch den Einsatz der nun in der Breite verfügbaren hohen Rechenkapazität konnten numerische Verfahren entwickelt werden, welche die komplexe Wechselwirkung zwi-

schen Wetter und Schallausbreitung im Freien abbilden. Dieser Wissensstand hat sich deutlich in der Formulierung des Arbeitspapiers der ISO TC niedergeschlagen. Nach diesem Vorschlag ist der Einfluß des Wetters durch eine Häufigkeitsangabe für 27 standardisierte Wind- und Temperaturprofile zu berücksichtigen, um eine zuverlässige Prognose zu erhalten. Gleichzeitig wird der Charakterisierung der Quelle kaum Beachtung geschenkt. Das Fehlen einer zuverlässigen Quellbeschreibung ist neben der Konzentration auf die Numerik ein wesentlicher Grund dafür, daß bisher die physikalische Validierung der Prognosen solcher detaillierten Ausbreitungsmodelle in den Hintergrund getreten ist und eigentlich noch nicht nachhaltig gelungen ist.

Auch bei der Diskussion um die Berücksichtigung der besonderen Störwirkung von Knallen bei der Lärmbeurteilung behindert das Fehlen einer zuverlässigen Quellbeschreibung die Weiterentwicklung. Der derzeitige Beratungsstand in der ISO/TC23 geht von 3 Klassen von Knallen aus, die verschiedene Impulzzuschläge erhalten sollen. Die Zuordnung der Knalle zu diesen Klassen erfolgt in einer rein verbalen Aufzählung der Geräuschquellen, weil eine Beschreibung der Knalle nach objektiven physikalischen Kenngrößen nicht zur Verfügung steht. Die Zuschläge auf A-Pegel reichen von 5 dB bis gegebenenfalls 30 dB, eine Größenordnung, die im krassen Widerspruch zu den Bemühungen bei der Ausbreitungsrechnung steht, die bei detaillierter Anwendung von 27 Wetterklassen vielleicht eine rechnerische Veränderung des prognostizierten Langzeitmittelungspegel im Zehntel-dB-Bereich zu bewirken vermögen.

Auf beiden Feldern wäre ein erheblicher Fortschritt zu erzielen, wenn die Knallquelle zuverlässiger beschrieben werden könnte. Deshalb ist ein wesentlicher Zweck dieses Beitrages, auf die Bedeutung einer physikalisch hinreichend zuverlässigen Beschreibung der Emissionsdaten hinzuweisen und eine Weiterentwicklung gerade auf diesem Gebiet zu fördern. Aus diesem Grunde ist es auch zu begrüßen, daß der VDI sich gerade auf die sachgerechte Erfassung der Quelle konzentriert und seine Überlegungen auch auf europäischer Ebene einbringt.

## Literatur

- /1/ Hirsch, K.-W., Buchta, E.: "Zur Berücksichtigung des Geschößknalles bei der Berechnung von Lärmkarten für die Umgebung von Truppenübungsplätzen", Fortschritte der Akustik, 20. Deutsche Jahrestagung 1994 in Dresden, S. 461 - 464
- /2/ Hirsch, K.-W., Buchta, E., Trimpop, M.: "Zur mathematischen Darstellung der Richtcharakteristik einer Punktschallquelle", Fortschritte der Akustik, 20. Deutsche Jahrestagung 1994 in Dresden, S. 845 - 848
- /3/ Wempen, J.: "Schallausbreitung über Erdboden; Messung und Interpretation des Wellenfeldes über realen Erdböden", Bibliotheks- und Informationssystem der Universität Oldenburg 1991 ISBN 3-8142-0349-6
- /4/ Hirsch, K.-W.: "The influence of receiver height on sound levels from sound sources in great distances" Proceedings Inter Noise 96, Liverpool
- /5/ Hirsch, K.-W., Buchta E.: "Physikalische Aspekte zur Begründung der Wahl der C-Bewertung zur Beurteilung hochintensiver Knallgeräusche", Fortschritte der Akustik, 22. Deutsche Jahrestagung 1996 in Bonn S. 294 - 296
- /6/ Kurze, U.J., Martner, O.: "Richtlinie zur Prognose von Schießgeräuschmissionen", Müller-BBM Bericht Nr. 32048/1 Nov. 1996; Hessische Landesanstalt für Umwelt, Umweltplanung, Arbeits- und Umweltschutz Heft 227
- /7/ "Bestimmungen zur Ermittlung und Beurteilung von Geräuschmissionen durch Schüsse mit großkalibrigen Waffen und durch Sprengungen"; Entwurf: Bundesministerium der Verteidigung BMVg
- /8/ Weber, W.: „Das Schallspektrum von Knallfunken und Knallpistolen mit einem Beitrag über die Anwendungsmöglichkeiten in der elektroakustischen Meßtechnik“; Akustische Zeitschrift 4(1939), 377-391

**7 Anhang I: Definitionen bzw. Wortwahl bei Waffenknallen**

<p><b>Schießgeräusch</b>                  Schießgeräusch ist das Schallereignis, das beim Einzelschuß einer Waffe beobachtet wird. Es setzt sich zusammen aus dem Abschußgeräusch, dem Bahngeräusch und dem Einschlaggeräusch.</p>	
	<p><b>Abschußgeräusch</b>                  Das Abschußgeräusch stammt von den Schallereignissen, die von der Feuerstellung aus vom Abschuß erzeugt werden. Es setzt sich zusammen aus dem Zündknall und dem Mündungsknall.</p>
	<p><b>Zündknall</b>                  Der Zündknall ist das Schallereignis beim Abfeuern einer Waffe, das durch das Zünden der Treibladung erzeugt wird. (Dazu gehört insbesondere bei rückstoßfreien Waffen, z.B. Panzerfäuste und Raketen, das Geräusch der nach hinten ausgeworfenen Materialien.)</p>
	<p><b>Mündungsknall</b>                  Der Mündungsknall ist das Schallereignis beim Abfeuern einer Waffe, das durch die Expansion der nach vorn aus dem Lauf austretenden Gase erzeugt wird.</p>
	<p><b>Bahngeräusch</b>                  Das Bahngeräusch stammt von den Schallereignissen, die auf der Flugbahn des Geschosses vom Geschos erzeugt werden. Es setzt sich zusammen aus dem Geschosknall oder dem Fluggeräusch.</p>
	<p><b>Geschosknall</b>                  Der Geschosknall ist das Schallereignis, das von überschallschnellen Geschossen erzeugt wird.</p>
	<p><b>Fluggeräusch</b>                  Das Fluggeräusch ist das Schallereignis, das von unterschallschnellen Geschossen erzeugt wird.</p>
	<p><b>Einschlaggeräusch</b>                  Das Einschlaggeräusch stammt von den Schallereignissen, die vom Zielgebiet aus beim Auftreffen des Geschosses erzeugt werden. Es setzt sich zusammen aus der Einschlagknall und dem Kugelschlag.</p>
	<p><b>Einschlagknall</b>                  Der Einschlagknall ist das Schallereignis, das von der Explosion des Geschosses erzeugt wird.</p>
	<p><b>Kugelschlag</b>                  Der Kugelschlag ist das Schallereignis, das vom Einschlag inerter Geschosse erzeugt wird.</p>

**8 Anhang II: Entwicklung nach Kreisfunktionen**

Zur Erleichterung der praktischen Anwendung der Entwicklung der Richtcharakteristik nach Kreisfunktionen wird hier für einige häufig verwendeten Meßanordnungen die Bestimmung des Spektrums explizit angegeben. Alle Meßanordnungen verlangen die Bestimmung des Wertes in Schießrichtung  $\varphi = 0^\circ$  und hinter der Waffe bei  $\varphi = 180^\circ$ . Unter der Voraussetzung der Spiegelsymmetrie zur Achse  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  (der Achse der Rotationssymmetrie bei Mündungsknallen von Waffen) sind die auf dem Halbkreis  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  ermittelten Werte auch in die entsprechenden Werte des Halbkreises  $180^\circ$  bis  $360^\circ$  einzutragen. Für das Teilspektrum der  $b_k$  gilt dann  $b_k \equiv 0$ , diese Koeffizienten brauchen daher in diesem Falle nicht berechnet zu werden.

Aufgeführt ist jeweils explizit die Berechnungsvorschrift für das Spektrum (Entwicklungskoeffizienten  $a_k$  und  $b_k$ ) in Matrixschreibweise in Abhängigkeit der unter den jeweiligen Winkeln  $\varphi_i$  bestimmten Funktionswerte  $M_i$  und die Gleichung  $M(\varphi)$  zur Berechnung beliebiger Zwischenwerte beim Winkel  $\varphi$ .

Zwei Meßpunkte bei  $\varphi_{1,2} = [0^\circ, 180^\circ]$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

$$M(\mathbf{j}) = a_0 + a_1 \cos(\mathbf{j})$$

Vier Meßpunkte bei  $\varphi_{1,2,3,4} = [0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ]$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

$$M(\mathbf{j}) = a_0 + a_1 \cos(\mathbf{j}) + b_1 \sin(\mathbf{j}) + a_2 \cos(2\mathbf{j})$$

Sechs Meßpunkte bei  $\varphi_{1,2,\dots,6} = [0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ]$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix}$$

$$M(\mathbf{j}) = a_0 + a_1 \cos(\mathbf{j}) + b_1 \sin(\mathbf{j}) + a_2 \cos(2\mathbf{j}) + b_2 \sin(2\mathbf{j}) + a_3 \cos(3\mathbf{j})$$

Acht Meßpunkte bei  $\varphi_{1,2,\dots,8} = [0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ]$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \end{bmatrix}$$

$$M(\mathbf{j}) = a_0 + a_1 \cos(\mathbf{j}) + b_1 \sin(\mathbf{j}) + a_2 \cos(2\mathbf{j}) + b_2 \sin(2\mathbf{j}) + a_3 \cos(3\mathbf{j}) + b_3 \sin(3\mathbf{j}) + a_4 \cos(4\mathbf{j})$$

Zwölf Meßpunkte bei  $\varphi_{1,2,\dots,12} = [0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ]$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ a_5 \\ b_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -2 & -\sqrt{3} & -1 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -2 & -\sqrt{3} & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -2 & \sqrt{3} & -1 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -2 & \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{bmatrix}$$

$$M(\mathbf{j}) = a_0 + a_1 \cos(\mathbf{j}) + b_1 \sin(\mathbf{j}) + a_2 \cos(2\mathbf{j}) + b_2 \sin(2\mathbf{j}) + a_3 \cos(3\mathbf{j}) + b_3 \sin(3\mathbf{j}) + a_4 \cos(4\mathbf{j}) + b_4 \sin(4\mathbf{j}) + a_5 \cos(5\mathbf{j}) + b_5 \sin(5\mathbf{j}) + a_6 \cos(6\mathbf{j})$$