Zur Berechnung des Geschossknalls von Flugkörpern auf ballistischen Flugbahnen

Jürgen Zangers[1], Karl-Wilhelm Hirsch [2]

[1] *Institut für Lärmschutz GmbH, E-Mail: mail@ifl-acoustics.de*

[2] *Cervus Consulting GmbH, E-Mail: : hirsch@cervus.de*

Einleitung

Die DIN ISO 17201-2 [1] beschreibt ein energiebasiertes Verfahren (im Rahmen der Strahlenakustik), mit dem der Schallexpositionspegel von Geschossknallen kleinkalibriger (< 20 mm) Handfeuerwaffen abgeschätzt werden kann. Im wesentlichen gliedert sich dieses Verfahren in fünf Schritte:

(0) Flugbahnberechnung
(1) Berechnung des Emissionspunktes auf (dem überschalligen Teil) der Flugbahn bei gegebenem Immissionspunkt
(2) Berechnung der abgestrahlten Schallenergie
(3) Berechnung der „Streufläche", in die diese Energie abgestrahlt wird
(4) Berechnung des Schallexpositionspegels am Immissionspunkt

Dabei wird zunächst von geraden Flugbahnen ausgegangen, darüber hinaus aber festgestellt, dass dieses Verfahren auch für ballistische Bahnen gültig ist, wenn sie durch eine Folge von Geradestücken angenähert werden können.

Eine detaillierte Analyse der angegebenen Gleichungen ergibt folgende implizite Vereinfachungen:

a) Die Erdanziehung wird vernachlässigt.
b) Der C_w - Wert wird als konstant vorausgesetzt.
c) Das Geschoss wird (im überschalligen Teil der Flugbahn) kontinuierlich verzögert.

Durch diese Annahmen ist die Anwendbarkeit des Verfahrens auf allgemeine ballistische Flugbahnen nur eingeschränkt möglich. Es wird ein Verfahren vorgestellt, das es erlaubt, die Punkte (0) – (4) ohne die Einschränkungen a) – c) zu berechnen.

Flugbahnberechnung

Im Gegensatz zu [1] (vgl. dort Gl. (13): $v(x) = v_{P0} + \kappa x$), wird hier die Flugbahn als zeit-parametrische Raumkurve nach dem „Point-Mass Model" ([3]) gem. Gl. (1) berechnet.

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = -\frac{\rho A C_W(M)}{2m} \cdot V^2(t) \cdot \vec{e}_V(t) + \vec{g} \qquad (1)$$

$\vec{V}(t), \vec{e}_V(t)$	Geschwindigkeitsvektor, Einheitsvektor in Richtung $\vec{V}(t)$
ρ	Luftdichte (höhenabhängig)
A	Querschnittsfläche des Geschosses
$C_W(M)$	von der Machzahl M abh. Luftreibungskoeffizient nach McCoy [2]
$M = \lvert\vec{V}\rvert / c$	M Machzahl, c Schallgeschwindigkeit
m	Masse des Geschosses
$\vec{g}$	Erdbeschleunigungsvektor

Eine Berechnung nach höherwertigen Modellen („Modified Point-Mass Model", „6-DOF Model") ist möglich (vgl. [3]).

Berechnung des Emissionspunktes

Die Berechnung des Emissionspunktes P_S auf der Flugbahn (bei gegebenem Immissionspunkt P_R) erfolgt in [1] über eine implizite Gleichung 4-ten Grades (Gl. (17) in [1]), die zwar (entgegen der Anmerkung 1 in [1]) sehr wohl analytisch lösbar, aber für die Bestimmung des Emissionspunktes nur bedingt geeignet ist. Hier erfolgt die Flugbahn-Emissionspunkt-Berechnung durch iterative Bestimmung des Flugbahnpunktes P_S, auf dessen „boomray"-Kegel der Immissionspunkt P_R liegt. Als „boomray" wird der Strahl bezeichnet, der von einem Quellpunkt auf der Flugbahn ausgeht und senkrecht auf dem Machkegel steht (vgl. Abbildung 1). P_R liegt auf dem Machkegel und innerhalb des boomray-Kegels von P_K und außerhalb des boomray-Kegels von P_{K+1}, wobei P_K und P_{K+1} die sich aus Gl. (1) ergebenden Flugbahnpunkte von zwei aufeinanderfolgenden Integrationsschritten sind. P_S lässt sich dann iterativ bestimmen. Die Luftbrechung wird dabei (wie in der Norm) vernachlässigt. Je nach Flugbahn (stark gekrümmt / beschleunigt) kann es auch mehrere Emissionspunkte zu einem Immissionspunkt geben!

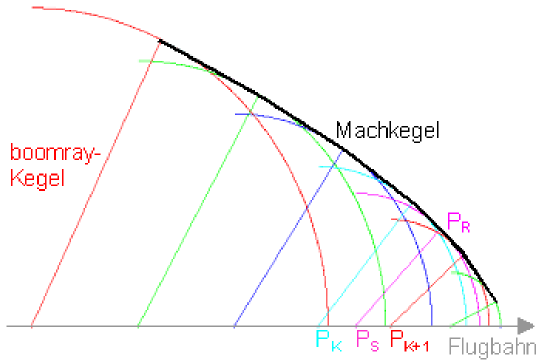

Abbildung 1: Flugbahn-Emissionspunkt-Berechnung durch iterative Bestimmung des Flugbahnpunktes, auf dessen boomray-Kegel der Immissionspunkt liegt (Flugbahn nur zur besseren Anschauung als Gerade dargestellt)

Berechnung der abgestrahlten Schallenergie

Bei dieser Berechnung ergeben sich bei genauerer Betrachtung der Ausführungen in der Norm [1] einige Ungereimtheiten. Im Kapitel „3 Begriffe" der Norm wird der Energieverlust einerseits als „Differenz der Geschossenergie der Translationsbewegung (...) als Folge der Luftreibung" definiert. Andererseits wird dieser Energieverlust als „Verlust von kinetischer Energie" beschrieben. Dies ist allgemein nicht das selbe. Die in der Norm angegebene Gleichung (14) berechnet den Energieverlust als Differenz von kinetischen Energien zu verschiedenen Zeitpunkten. Bei einer Bewegung mit gleichbleibender Geschwindigkeit ergibt sich dann nach Gleichung (14) die abgestrahlte Schallenergie zu 0. Hier wird die o.g. Formulierung unmittelbar umgesetzt: Die

„Differenz der Geschossenergie der Translationsbewegung (...) als Folge der Luftreibung“ wird als Wegintegral der Luftreibungskraft längs der Flugbahn berechnet.

$$W = -\int_{\vec{P}_X}^{\vec{P}_S} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \tag{2}$$

Unter Berücksichtigung, dass $\vec{F}(\vec{s})$ die Luftreibung beschreibt, der Definition der Machzahl, dass das Wegintegral entlang der Flugbahn ausgewertet wird und dass die Geschwindigkeit stets tangential zur Flugbahn ist (Voraussetzung des „Point-Mass Models“), ergibt sich mit Gl. (1):

$$W = \widetilde{A} \cdot \int_{\vec{P}_X}^{\vec{P}_S} C_W(M) \cdot M^2(\vec{s}) \cdot ds \qquad \text{mit } \widetilde{A} = \frac{1}{2}\rho A c^2 \tag{3}$$

Dabei ist $\vec{P}_S$ der Emissionspunkt und $\vec{P}_X$ - wie in der Norm - der Punkt 1 m vor $\vec{P}_S$. Die abgestrahlte Schallenergie Q_p ergibt sich dann mit dem „akustischen Wirkungsgrad“ σ_{ac} (analog Gl. (15) in [1]) zu $Q_p(\vec{P}_S) = \sigma_{ac} \cdot W$.

Berechnung der „Streufläche“

In der (unglücklich formulierten deutschen Fassung der) Norm wird die „Streufläche“ S_S mit Hilfe der in Abbildung 2 wiedergegebenen Formeln berechnet (vgl. [1]).

$$S_S(r_S) = 2\pi\Delta x^2 \left[\sin^2 \xi_S \left(\frac{\cos \xi_S}{2} + \frac{r_S}{\Delta x} \right) + \frac{r_S^2}{\Delta x^2} \sin\left(\xi_S - \frac{\varepsilon_S}{2} \right) \sin \varepsilon_S \right]$$

$$\xi_S = \arccos\left(\frac{c}{v(x_S - \Delta x)} \right)$$

$$\varepsilon_S = \arccos\left(\frac{c}{v(x_S - \Delta x)} \right) - \arccos\left(\frac{c}{v(x_s)} \right)$$

Abbildung 2: Berechnung der Streufläche gem. Norm (entnommen aus [1])

Eine genauere Betrachtung der ersten Gleichung in Abbildung 2 ergibt, dass diese Gleichung im allgemeinen nur für $\varepsilon_S \geq 0$ gilt. $\varepsilon_S < 0$ tritt dann ein, wenn die Bewegung beschleunigt ist. Dies kann durchaus bei ballistischen Flugbahnen von Haubitzengeschossen (insbes. bei Steilschüssen) auftreten – ganz sicher aber bei Raketenflugbahnen. Je nach Größe von ε_S und r_S kann dann $S_S(r_S)$ 0 oder negativ werden. Hier wird die Streufläche wie folgt berechnet (vgl. dazu auch Abbildung 1):

Die Streufläche ist Teil der Schockfront und diese ist in erster Näherung identisch mit dem Mach-Kegel. Von allen Strahlen, die von einer Quelle ausgehen, müssen nur die boomrays betrachtet werden, um zum einen den Mach-Kegel und zum anderen die Amplitude des Überschallknalls zu bestimmen (vgl. [4]). Da die Endpunkte der boomrays auf dem Mach-Kegel liegen, ergibt die Spur der boomray-Endpunkte die Mantellinie der rotationssymmetrischen Streufläche S_S. Hierbei ist zu beachten, dass es nicht ausreicht, die Endpunkte der boomrays an den zwei Endpunkten $\vec{P}_X$ und $\vec{P}_S$ (vgl. Gl. (3)) zu betrachten, da es bei starken Beschleunigungen durchaus vorkommen kann, dass sich diese boomrays zu irgendeinem Zeitpunkt t schneiden. Die so definierte Mantellinie und damit auch die Streufläche lässt sich allerdings nicht mehr (wie in der Norm) analytisch berechnen, sondern nur noch numerisch. Der damit verbundene Rechenzeit-Aufwand ist allerdings nicht wesentlich größer als der nach der Norm notwendige.

Berechnung des Schallexpositionspegels

Zur Berechnung des (geschossknallinduzierten) Schallexpositionspegels muss nun noch der durch die Luftabsorption bedingte Energieverlust auf der Strecke vom Emissionspunkt zum Immissionspunkt berücksichtigt werden. Für die Berechnung der Luftabsorption ist zum einen die Kenntnis der „Signaturfrequenz“ f_c (vgl. [1]) und zum anderen die Temperatur sowie die relative Luftfeuchte erforderlich. Für die „lokale“ Absorption der Schallenergie an einem Ort $\vec{s}$ gilt (vgl. z.B. [5]):

$$E(\vec{s} + d\vec{s}) = E(\vec{s}) \cdot \alpha(T(\vec{s}), H_{rel}(\vec{s}), f_c)^{-ds} \tag{4}$$

Für eine geschichtete Atmosphäre mit n+2 Schichten und Orten $\vec{s}_0$, ..., $\vec{s}_n$ auf den jeweiligen Schichtgrenzen und schichtweise linearer Änderung des Absorptionskoeffizienten, lässt sich für die Laufstrecke eines Schallstrahls von $\vec{s}_i$ nach $\vec{s}_{i+1}$ ein „mittlerer“ Absorptionskoeffizient berechnen:

$$\alpha_{i,i+1} = \left[\frac{\alpha_{i+1} \cdot \log(\alpha_{i+1}) - \alpha_i \cdot \log(\alpha_i)}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} - 1 \right] \tag{5}$$

Damit ergibt sich dann die Energie am Ort $\vec{s}_n$:

$$E(\vec{s}_n) = E(\vec{s}_0) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} e^{-\alpha_{i,i+1} \cdot |\vec{s}_{i+1} - \vec{s}_i|} = E(\vec{s}_0) \cdot \alpha_{ges} \tag{6}$$

Der Schallexpositionspegel L_E am Immissionsort $\vec{s}_n$ ergibt sich dann zu:

$$L_E(\vec{s}_n) = 10 \cdot \lg\left(\rho c \cdot \left[\frac{\alpha_{ges} \cdot Q_p(\vec{P}_S)}{S_S} \right] \cdot \frac{1}{E_0} \right) \tag{7}$$

mit $E_0 = (20\mu Pa)^2$.

Literatur

[1] DIN ISO 17201-2 und -4

[2] McCoy, Robert L. „MC DRAG“ – *a computer program for estimating the drag coefficients of projectiles*, Technical Report ARBRL-TR-02293, 1981

[3] McCoy, Robert L. *Modern Exterior Ballistics*, Schiffer Publishing Ltd., Atglen, PA, 1999

[4] Kaouri, K., *Secondary Sonic Boom*. PhD/DPhil thesis, University of Oxford, 2004

[5] ANSI S1.26-1978

Diese Untersuchungen wurden vom Bundesministerium der Verteidigung gefördert.